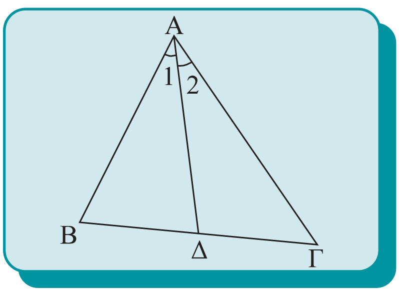
7.8 Θεωρήματα των διχοτόμων τριγώνου

Θα μελετήσουμε εδώ, ως εφαρμογές του θεωρήματος του Θαλή, βασικές ιδιότητες της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου γωνίας τριγώνου.

Θεώρημα (εσωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας γωνίας τριγώνου διαιρεί την απέναντι πλευρά εσωτερικά σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.



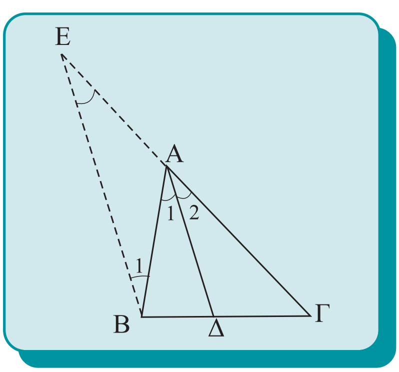
Σχήμα 17

Δηλαδή, αν ΑΔ διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει

$$\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}.$$

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ (σχ.18). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ, που τέμνει την προέκταση της ΑΓ στο Ε. Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΕΒ έχουμε $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΕ}{ΑΓ}$ (1).



Σχήμα 18

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΕ = ΑΒ. Πράγματι:

$\hat{Α}_1=\hat{Β}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ),

$\hat{Α}_2=\hat{Ε}$ (εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΔ και ΒΕ),

$\hat{Α}_1=\hat{Α}_2$ (ΑΔ διχοτόμος),

οπότε $\hat{Β}_1=\hat{Ε}$ άρα ΑΕ = ΑΒ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$.

Επειδή το σημείο Δ που διαιρεί την πλευρά ΒΓ σε λόγο $\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ είναι μοναδικό, το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Αν το Δ είναι σημείο της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\frac{ΔΒ}{ΔΓ}=\frac{ΑΒ}{ΑΓ}$ τότε η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$.

- **Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων, στα οποία διαιρεί η διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α,β,γ.**

Στο σχ.18 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του Δ από τα Β και Γ.

Η προηγούμενη αναλογία γράφεται:

$$\frac{\Delta B}{\Delta \Gamma}=\frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta B}{\Delta B+\Delta \Gamma}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{\Delta B}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta+\gamma}$$

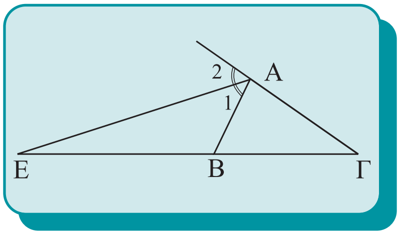
οπότε $\Delta B=\dfrac{\alpha\gamma}{\beta+\gamma}$. Όμοια βρίσκουμε $\Delta \Gamma=\dfrac{\alpha\beta}{\beta+\gamma}$.

Θεώρημα (εξωτερικής διχοτόμου τριγώνου)

Η διχοτόμος μιας εξωτερικής γωνίας τριγώνου τέμνει την προέκταση της απέναντι πλευράς σε ένα σημείο, το οποίο διαιρεί εξωτερικά την πλευρά αυτή σε λόγο ίσο με το λόγο των προσκείμενων πλευρών.

Δηλαδή, αν η ΑΕ είναι εξωτερική διχοτόμος του τριγώνου ΑΒΓ, ισχύει ότι:

$$\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AB}{A\Gamma}.$$

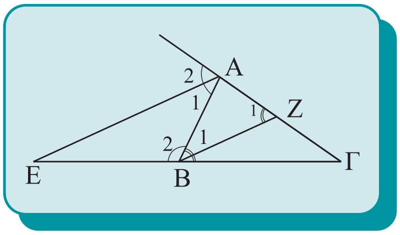


Σχήμα 19

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η εξωτερική διχοτόμος του ΑΕ (σχ.20). Από το Β φέρουμε παράλληλη προς την ΑΕ, που τέμνει την ΑΓ στο Ζ. Από το θεώρημα του Θαλή στο τρίγωνο ΓΑΕ έχουμε

$$\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{AZ}{A\Gamma} \quad (1).$$



Σχήμα 20

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι ΑΖ = ΑΒ. Πράγματι:

$\hat{A}_1=\hat{B}_1$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ),

$\hat{A}_2=\hat{Z}_1$(εντός εκτός και επί τα αυτά των παραλλήλων ΑΕ και ΒΖ),

$\hat{A}_1=\hat{A}_2$ (ΑΕ εξωτερική διχοτόμος),

οπότε $\hat{B}_1=\hat{Z}_1$ άρα ΑΕ = ΑΒ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\dfrac{EB}{E\Gamma}=\dfrac{AB}{A\Gamma}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το σημείο Ε βρίσκεται προς το μέρος της ***μικρότερης*** *πλευράς.*
Πράγματι αν $\beta>\gamma$ *τότε* $\hat{B}>\hat{\Gamma}$ *οπότε* $\hat{\Gamma}=\varphi>0$.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A}_1+\hat{B}_2<180^o$.

Έχουμε $\hat{A}_1=\dfrac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2}=\dfrac{\hat{B}+\hat{\Gamma}}{2}$ *και* $\hat{B}_2=180^o-\hat{B}$, *οπότε*

$$\hat{A}_1+\hat{B}_2=180^\circ-\hat{B}+\frac{\hat{B}}{2}+\frac{\hat{\Gamma}}{2}=180^\circ-\left(\frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}\right)=180^\circ-\frac{\varphi}{2}<180^\circ.$$

Αν ΑΒ = ΑΓ, τότε το Ε ***δεν*** *υπάρχει. (Εφαρμογή 1 – § 4.8)*

Το θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:
Αν το Ε είναι σημείο της προέκτασης της πλευράς ΒΓ και ισχύει $\dfrac{BE}{E\Gamma}=\dfrac{AB}{A\Gamma}$**, τότε η ΑΕ είναι η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας** $\hat{A}$**.**

- **Υπολογισμός των ευθύγραμμων τμημάτων στα οποία διαιρεί η εξωτερική διχοτόμος την απέναντι πλευρά ως συνάρτηση των α,β,γ.**

Στο σχ.20 θέλουμε να υπολογίσουμε τις αποστάσεις του Ε από τα Β και Γ.
Η προηγούμενη αναλογία γράφεται:

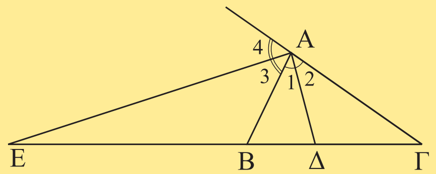
$$\frac{EB}{E\Gamma}=\frac{\gamma}{\beta} \quad \text{ή} \quad \frac{EB}{E\Gamma-EB}=\frac{\gamma}{\beta-\gamma} \quad \text{ή} \quad \frac{EB}{\alpha}=\frac{\gamma}{\beta-\gamma},$$

οπότε $\boxed{EB=\dfrac{\alpha\gamma}{\beta-\gamma}}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $\boxed{E\Gamma=\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\gamma}}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν Δ και Ε είναι τα ίχνη της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, *τριγώνου ΑΒΓ, στην απέναντι πλευρά, θα είναι* $\dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\dfrac{AB}{A\Gamma}$ *και* $\dfrac{EB}{E\Gamma}=\dfrac{AB}{A\Gamma}$, *οπότε* $\dfrac{\Delta B}{\Delta\Gamma}=\dfrac{EB}{E\Gamma}$.

Δηλαδή τα ίχνη Δ και Ε των δύο διχοτόμων είναι σημεία ***συζυγή αρμονικά*** *ως προς τις κορυφές Β και Γ του τριγώνου ΑΒΓ.*



Σχήμα 21

7.9 Απολλώνιος Κύκλος

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

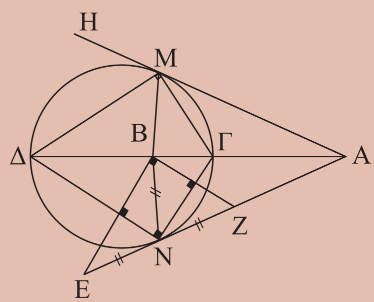
Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία Α και Β του επιπέδου έχουν γνωστό λόγο $\frac{\mu}{\nu} \neq 1$.

Λύση

Έστω δύο δεδομένα σημεία Α, Β και Μ τυχαίο σημείο του τόπου με την ιδιότητα $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (1).

Φέρουμε την εσωτερική διχοτόμο ΜΓ και την εξωτερική διχοτόμο ΜΔ του τριγώνου ΜΑΒ. Τότε

$\frac{\Gamma A}{\Gamma B} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (2) και $\frac{\Delta A}{\Delta B} = \frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$ (3).



Σχήμα 22

Δηλαδή, τα σημεία Γ και Δ είναι ορισμένα, αφού χωρίζουν το ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{\mu}{\nu}$. Ακόμα είναι $\Gamma\hat{M}\Delta = 90°$, επειδή οι ΜΓ και ΜΔ είναι διχοτόμοι των δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών $A\hat{M}B$ και $B\hat{M}H$.

Άρα το Μ ανήκει σε κύκλο με διάμετρο το τμήμα ΓΔ.

Αντίστροφα: Έστω Ν ένα σημείο του κύκλου με διάμετρο το τμήμα ΓΔ. Τότε $\Gamma\hat{N}\Delta = 90^o$.

Θα αποδείξουμε ότι $\frac{NA}{NB} = \frac{\mu}{\nu}$.

Από το Β φέρουμε ΒΕ//ΓΝ, οπότε στο τρίγωνο ΑΒΕ είναι

$$\frac{NA}{NE} = \frac{\Gamma A}{\Gamma B} \text{ ή λόγω της (2) } \frac{NA}{NE} = \frac{\mu}{\nu} \quad (4).$$

Επίσης φέρουμε ΒΖ//ΔΝ, οπότε στο τρίγωνο ΑΔΝ είναι

$$\frac{NA}{NZ} = \frac{\Delta A}{\Delta B} \text{ ή λόγω της (3) } \frac{NA}{NZ} = \frac{\mu}{\nu} \quad (5).$$

Από τις σχέσεις (4) και (5) προκύπτει ότι $\frac{NA}{NE} = \frac{NA}{NZ}$, οπότε ΝΕ=ΝΖ, δηλαδή το Ν είναι μέσο του ΕΖ.

Επειδή $\Gamma\hat{N}\Delta = 90^o$ και ΒΕ//ΓΝ, ΒΖ//ΔΝ, θα είναι και $E\hat{B}Z = 90^o$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΒΖ είναι ορθογώνιο στο $\hat{B}$ με διάμεσο ΒΝ, οπότε ΝΒ = ΝΕ = ΝΖ (6).

Από τις σχέσεις (4) και (6) έχουμε $\frac{ΝΑ}{ΝΒ}=\frac{μ}{ν}$.

Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος με διάμετρο ΓΔ.

Κατασκευή

Αν δοθούν τα σημεία Α και Β και ο λόγος $\frac{μ}{ν}$, διαιρούμε το τμήμα ΑΒ εσωτερικά και εξωτερικά σε λόγο $\frac{μ}{ν}$, όπως στο πρόβλημα 2, § 7.7 και βρίσκουμε τα Γ και Δ. Στη συνέχεια γράφουμε τον κύκλο με διάμετρο ΓΔ.

Διερεύνηση

Αν είναι $\frac{μ}{ν}=1$, τότε $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=1$ ή ΜΑ = ΜΒ. Άρα το Μ ισαπέχει από τα Α και Β, οπότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Ο προηγούμενος γεωμετρικός τόπος λέγεται **Απολλώνιος κύκλος**, από το όνομα του Έλληνα μαθηματικού Απολλωνίου που πρώτος μελέτησε το θέμα.*
Γενικά υπάρχουν άπειροι απολλώνιοι κύκλοι ως προς δύο σημεία Α και Β. Για να ορισθεί κάποιος από αυτούς, όταν δοθούν τα Α και Β, χρειάζεται να δοθεί ο λόγος $\frac{μ}{ν}$ ή ένα από τα σημεία Γ, Δ, ή ισοδύναμα, ένα τυχαίο σημείο του απολλώνιου κύκλου, ώστε ο λόγος να είναι προσδιορισμένος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

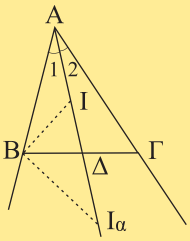
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να εξηγήσετε γιατί τα ίχνη Δ, Ε της εσωτερικής και εξωτερικής διχοτόμου της γωνίας $\hat{A}$, τριγώνου ΑΒΓ, είναι συζυγή αρμονικά των Β και Γ.*

2. *Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος τριγώνου ΑΒΓ και $ΔΒ=\frac{γ}{2}$, να δικαιολογήσετε γιατί $β+γ=2α$.*

3. *Τι ονομάζεται Απολλώνιος κύκλος ως προς δυο σημεία Α και Β; Πόσοι τέτοιοι Απολλώνιοι κύκλοι υπάρχουν; Με ποιους τρόπους μπορεί να ορισθεί κάποιος από αυτούς;*

4. *Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΔ η διχοτόμος, Ι το έγκεντρο και $I_α$ το παράκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Τα σημεία (Α,Δ) και (Ι,$I_α$) αποτελούν αρμονική τετράδα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*



5. *Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που οι αποστάσεις τους από δύο ορισμένα σημεία Α και Β έχουν λόγο λ=1 είναι:*
i) Κύκλος διαμέτρου ΑΒ *ii) Η μεσοκάθετος του ΑΒ*
iii) Το μέσο Μ του ΑΒ *iv) Κανένα από τα παραπάνω.*
(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Ε. Να αποδείξετε ότι* $\frac{AE}{EM} = 2\frac{A\Delta}{\Delta\Gamma}$.

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=6, ΒΓ=10, ΑΓ=9. Αν ΑΔ, ΑΕ η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$, *να υπολογισθεί το ΔΕ.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{A} = 90°$ *και η διάμεσός του ΑΜ. Αν η διχοτόμος της γωνίας* $A\hat{M}B$ *τέμνει την ΑΒ στο Δ και την προέκταση της ΓΑ στο Ε, να αποδείξετε ότι* $EA \cdot \Delta B = E\Gamma \cdot A\Delta$.

4. *Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ και οι διχοτόμοι των γωνιών* $A\hat{M}B$ *και* $A\hat{M}\Gamma$ *τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.*

5. *Αν ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι :*

$$\frac{\Delta B}{\Delta\Gamma} \cdot \frac{E\Gamma}{EA} \cdot \frac{ZA}{ZB} = 1.$$

Διατυπώστε και αποδείξτε ανάλογη πρόταση για τις εξωτερικές διχοτόμους.

6. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Δ τυχαίο σημείο του τόξου ΒΓ και η ΑΔ τέμνει την πλευρά ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι* $E\Delta \cdot \Delta\Gamma = E\Gamma \cdot \Delta B$.

7. *Σε ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ φέρουμε τις εφαπτόμενες στα άκρα της διαμέτρου, καθώς και μία εφαπτομένη σε τυχαίο σημείο του Ε, που τέμνει την ευθεία ΑΒ στο Ζ και τις άλλες δύο εφαπτόμενες στα Γ και Δ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Γ, Δ είναι συζυγή αρμονικά των Ε, Ζ.*

8. *Δύο πλευρές ενός τριγώνου είναι 20m και 36m. Η διχοτόμος της γωνίας, η οποία περιέχεται μεταξύ των δύο αυτών πλευρών, διαιρεί την τρίτη πλευρά σε δύο μέρη, τα οποία διαφέρουν κατά 12m. Να υπολογισθεί η τρίτη πλευρά.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνονται οι διαδοχικές γωνίες* $x\hat{O}y = y\hat{O}z = z\hat{O}t = 45°$ *και τα σημεία Α, Δ των Οx, Οt αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΟΑ = ΟΔ. Αν Β, Γ είναι τα σημεία τομής της ΑΔ με τις Οy, Οz αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $AB^2 = B\Gamma \cdot A\Delta$.

2. *Από το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε την παράλληλη στη διχοτόμο του ΑΔ, που τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και το έγκεντρό του Ι.*

i) *Να υπολογισθεί ο λόγος* $\frac{AI}{I\Delta}$, *ως συνάρτηση των πλευρών α, β, γ του τριγώνου.*

ii) *Αν* $\beta + \gamma = 2\alpha$ *και Κ το βαρύκεντρο του τριγώνου, τότε:*

α) *ΙΚ//ΒΓ* β) $ZE = \frac{\beta+\gamma}{3}$, *όπου Ζ, Ε τα σημεία τομής των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα με την ευθεία ΙΚ.*

4. *Αν οι διχοτόμοι των γωνιών* $\hat{B}$ *και* $\hat{\Gamma}$ *ενός τριγώνου ΑΒΓ, τέμνουν τη διάμεσό του ΑΜ στα Δ και Ε αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $\frac{A\Delta}{\Delta M} + \frac{AE}{EM} > 2$.

5. *Οι μη παράλληλες πλευρές τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν η διχοτόμος της γωνίας* $A\hat{O}B$ *τέμνει τις ΑΒ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*

i) $Z\Delta \cdot B\Gamma = Z\Gamma \cdot A\Delta$,

ii) $EA \cdot B\Gamma = EB \cdot A\Delta$.

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν η κάθετη διάμετρος ΚΛ στη ΒΓ τέμνει τις ΑΒ, ΑΓ στα Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ είναι συζυγή αρμονικά των Κ, Λ.*

2. *Αν οι διχοτόμοι δύο απέναντι γωνιών τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται πάνω στη διαγώνιο που ενώνει τις δύο άλλες κορυφές του, τότε είναι* $AB \cdot \Gamma\Delta = A\Delta \cdot B\Gamma$. *Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.*

3. *Δίνεται τόξο* $\overset{\frown}{AB}$ *κύκλου (Ο,R). Να ορίσετε σημείο Μ του τόξου* $\overset{\frown}{AB}$, *τέτοιο ώστε* $\frac{MA}{MB} = \frac{\mu}{\nu}$, *όπου μ, ν δοσμένα τμήματα.*

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ των πλευρών του ΑΔ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε ΔΕ = ΒΖ. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΒΕ και ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ΓΗ είναι διχοτόμος της γωνίας* $B\hat{\Gamma}\Delta$.

5. *Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ με βάση ΒΓ=α, ύψος ΑΗ=υ και* $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\mu}{\nu}$, *όπου μ,ν δοσμένα τμήματα.*