7.1 Εισαγωγή

Μέγεθος γενικά λέγεται οτιδήποτε επιδέχεται αύξηση ή ελάττωση. **Γεωμετρικά μεγέθη** λέγονται τα μεγέθη που εξετάζονται από τη Γεωμετρία. Τέτοια είναι τα ευθύγραμμα τμήματα, οι γωνίες, τα τόξα, οι επιφάνειες επίπεδων σχημάτων, οι όγκοι των στερεών κτλ.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με τα απλούστερα γεωμετρικά μεγέθη, τα ευθύγραμμα τμήματα.

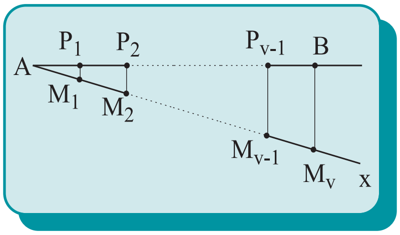
Αρχικά θα διαιρέσουμε δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη.

7.2 Διαίρεση ευθύγραμμου τμήματος σε ν ίσα μέρη

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, το οποίο θέλουμε να διαιρέσουμε σε ν ίσα μέρη ($\nu \geq 2$).

Φέρουμε τυχαία ημιευθεία Αx, διαφορετική από την ΑΒ και παίρνουμε με το διαβήτη πάνω σε αυτή ν διαδοχικά ίσα τμήματα $ΑΜ_1 = Μ_1Μ_2 = ... = Μ_{\nu-1}Μ_\nu$.

Έπειτα φέρουμε το τμήμα $Μ_\nu Β$ και από τα σημεία $Μ_1$, $Μ_2$, ..., $Μ_{\nu-1}$ φέρουμε παράλληλες προς τη $Μ_\nu Β$ που τέμνουν το ΑΒ στα σημεία $Ρ_1$, $Ρ_2$, ..., $Ρ_{\nu-1}$ αντίστοιχα. Οι παράλληλες αυτές, σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, § 5.6, ορίζουν ν ίσα τμήματα πάνω στην ΑΒ. Επομένως τα ν ίσα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΡ_1$, $Ρ_1Ρ_2$, ..., $Ρ_{\nu-1}Β$ είναι τα ζητούμενα.

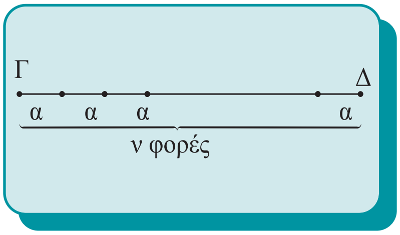


Σχήμα 1

Στη συνέχεια θα ορίσουμε, γενικά, το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με οποιοδήποτε ρητό αριθμό και το λόγο δύο ευθύγραμμων τμημάτων.

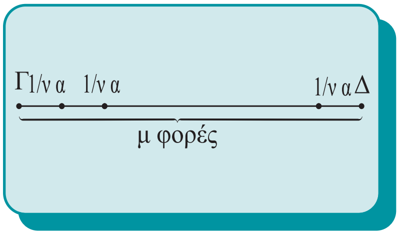
7.3 Γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος με αριθμό – Λόγος ευθύγραμμων τμημάτων.

• Όπως είδαμε στην §2.8, αν ΑΒ=α ευθύγραμμο τμήμα και ν **φυσικός** αριθμός, ονομάζουμε γινόμενο του τμήματος ΑΒ επί το φυσικό αριθμό ν το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι το άθροισμα ν ευθύγραμμων τμημάτων ίσων προς το ΑΒ=α. Γράφουμε ΓΔ=ν · ΑΒ.



Σχήμα 2

• Αν χωρίσουμε, όπως παραπάνω, το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ=α σε ν ίσα μέρη καθένα από τα ν ίσα τμήματα τα παριστάνουμε με $\dfrac{AB}{\nu}$ ή $\dfrac{1}{\nu}\cdot AB$. Ένα ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ λέγεται ***υποδιαίρεση*** (ή ***υποπολλαπλάσιο***) του ΑΒ αν υπάρχει ένας φυσικός αριθμός ν ώστε $EZ = \dfrac{AB}{\nu}$.



Σχήμα 3

• Αν μ είναι ένας θετικός ακέραιος και προσθέσουμε μ τέτοια τμήματα προκύπτει το τμήμα $\Gamma\Delta = \mu\left(\dfrac{1}{\nu}AB\right) = \dfrac{\mu}{\nu}AB$. Ονομάζουμε λοιπόν ***γινόμενο*** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ επί το **θετικό ρητό** αριθμό $q = \dfrac{\mu}{\nu}$ το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο είναι το άθροισμα μ ευθύγραμμων τμημάτων ίσων με $\dfrac{1}{\nu}AB$.

Γράφουμε $\Gamma\Delta = q \cdot AB$.

Ορίζουμε ότι το γινόμενο ευθύγραμμου τμήματος επί τον αριθμό $q = 0$ είναι το **μηδενικό** ευθύγραμμο τμήμα.

Αποδεικνύεται ότι για ένα δοσμένο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα **θετικό άρρητο** αριθμό ρ υπάρχει πάντοτε ένα ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ τέτοιο, ώστε $\Gamma\Delta = \rho \cdot AB$. Η κατασκευή όμως, τέτοιων ευθύγραμμων τμημάτων με τον κανόνα και το διαβήτη δεν είναι πάντοτε δυνατή.

ΣΧΟΛΙΟ

Η γραφή $\dfrac{\Gamma\Delta}{AB}$ δεν σημαίνει διαίρεση ευθύγραμμων τμημάτων αλλά είναι συμβολική γραφή της ισότητας $\Gamma\Delta = q \cdot AB$. Σημαίνει διαίρεση όταν τα θεωρήσουμε πάνω στην ίδια ευθεία.

• Έστω δύο μη μηδενικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΓΔ. Αν υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ και φυσικοί αριθμοί μ, ν τέτοιοι ώστε να ισχύει: $AB = \nu \cdot K\Lambda$ και $\Gamma\Delta = \mu \cdot K\Lambda$ τα δύο ευθύγραμμα τμήματα λέγονται ***σύμμετρα***. Το ΚΛ λέγεται ***κοινό μέτρο*** των ΑΒ και ΓΔ.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι αν τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι σύμμετρα, τότε θα υπάρχει ένας θετικός ρητός αριθμός $q = \dfrac{\mu}{\nu}$ τέτοιος, ώστε $\Gamma\Delta = q \cdot AB$. Ο αριθμός q λέγεται ***λόγος*** των δύο τμημάτων και γράφεται με μορφή κλάσματος, δηλαδή $q = \dfrac{\Gamma\Delta}{AB}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Το κοινό μέτρο δεν είναι μοναδικό γιατί κάθε υποδιαίρεση του ΚΛ είναι κοινό υποπολλαπλάσιο των ΑΒ και ΓΔ. Επίσης είναι φανερό ότι ***δύο σύμμετρα ευθύγραμμα τμήματα είναι (ακέραια) πολλαπλάσια κάθε κοινού τους μέτρου.***

Δύο ευθύγραμμα τμήματα που δεν είναι σύμμετρα λέγονται **ασύμμετρα.** Θα λέμε επίσης ότι ο λόγος τους είναι **άρρητος** αριθμός. Τέτοιες περιπτώσεις δεν είναι σπάνιες. Θα δούμε αργότερα ότι η πλευρά και η διαγώνιος ενός τετραγώνου δεν έχουν κοινό μέτρο.

7.4 Ανάλογα ευθύγραμμα τμήματα - Αναλογίες

Δύο ευθύγραμμα τμήματα α, γ λέγονται ***ανάλογα*** προς δύο άλλα ευθύγραμμα τμήματα β, δ όταν ο λόγος του α προς το β ισούται με το λόγο του γ προς το δ, δηλαδή όταν ισχύει:

$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ (1). Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει θετικός αριθμός λ, ώστε να ισχύει $\alpha=\lambda\cdot\beta$ και $\gamma=\lambda\cdot\delta$.

Η παραπάνω ισότητα (1) λέγεται ***αναλογία*** με όρους τα ευθύγραμμα τμήματα α, β, γ και δ. Τα τμήματα α και β λέγονται ***ομόλογα*** ή ***αντίστοιχα***. Το ίδιο και τα γ και δ.

Τα α, δ λέγονται ***άκροι όροι,*** ενώ τα β, γ ***μέσοι όροι*** της αναλογίας. Ο τέταρτος όρος δ της αναλογίας λέγεται και ***τέταρτη ανάλογος*** των α, β και γ.

Στην αναλογία $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}$ οι μέσοι όροι είναι ίσοι. Αυτή η αναλογία λέγεται ***συνεχής*** και ο β λέγεται ***μέση ανάλογος*** των α και γ. Το β λέγεται επίσης ***γεωμετρικός μέσος*** των α και γ. Συχνά είναι χρήσιμο να αντικαταστήσουμε μια αναλογία με μια ισοδύναμη έκφραση. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των αναλογιών, που είναι γνωστές από το Γυμνάσιο, τις οποίες παίρνουμε χωρίς απόδειξη. Οι σπουδαιότερες από αυτές είναι οι εξής:

Ιδιοτητες αναλογιων

- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\alpha\delta=\beta\gamma$, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}\Leftrightarrow\beta^2=\alpha\gamma$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\beta}{\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha\pm\beta}{\beta}=\frac{\gamma\pm\delta}{\delta}$, $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{\alpha\pm\beta}=\frac{\gamma}{\gamma\pm\delta}$
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}=\cdots=\frac{\kappa}{\lambda}=\frac{\alpha+\gamma+\cdots+\kappa}{\beta+\delta+\cdots+\lambda}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν εφαρμόζουμε ιδιότητες σε αναλογίες με όρους ευθύγραμμα τμήματα, θεωρούμε ότι έννοιες που δεν έχουν οριστεί για ευθύγραμμα τμήματα (π.χ. "πολλαπλασιασμός ευθύγραμμων τμημάτων"), αναφέρονται αποκλειστικά στα μήκη τους.

7.5 Μήκος ευθύγραμμου τμήματος

Όταν λέμε ότι θα **μετρήσουμε** ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σημαίνει ότι θα το συγκρίνουμε με ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ, το οποίο παίρνουμε ως **μονάδα μέτρησης**. Η επιλογή της μονάδας μέτρησης είναι αυθαίρετη.
Στο $2^{ο}$ κεφάλαιο αναφέραμε την έννοια του μήκους ευθύγραμμου τμήματος. Εδώ θα διατυπώσουμε τον ορισμό με τη βοήθεια του λόγου ευθύγραμμων τμημάτων.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

• *Το μέτρο του τμήματος είναι μη αρνητικός αριθμός και θα συμβολίζεται όπως και το τμήμα. Έτσι, **με το σύμβολο ΑΒ θα εννοούμε και το μέτρο του τμήματος ΑΒ**.*

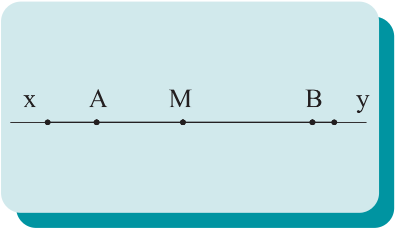
• *Όσα αναφέραμε για το **λόγο** και το **μέτρο** τμήματος ισχύουν γενικά και για άλλα γεωμετρικά μεγέθη, όπως η γωνία, το τόξο κτλ.*

Ορισμός

***Μέτρο* ή *μήκος* ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο λόγος του προς ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα, που παίρνουμε ως μονάδα μέτρησης.**

Άμεσες συνέπειες του ορισμού του μέτρου τμήματος είναι οι παρακάτω προτάσεις:
• Δύο ίσα τμήματα έχουν ίσα μέτρα και αντίστροφα, ως προς οποιαδήποτε μονάδα μέτρησης.
• Ο λόγος των μέτρων δύο τμημάτων, που μετρώνται με την ίδια μονάδα μέτρησης, ισούται με το λόγο των δύο τμημάτων και είναι ανεξάρτητος από τη μονάδα μέτρησης.

7.6 Διαίρεση τμημάτων εσωτερικά και εξωτερικά ως προς δοσμένο λόγο



Σχήμα 4

Είδαμε στην § 7.2 πώς διαιρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη. Θα δούμε στη συνέχεια πότε ένα σημείο Μ διαιρεί ένα ευθύγραμμο τμήμα σε δοσμένο λόγο. Σε ευθεία xy δίνονται δύο ορισμένα σημεία Α και Β. Έστω σημείο Μ της ευθείας xy, διαφορετικό του Β. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:
1) Αν το Μ είναι εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ τότε ο λόγος των αποστάσεών του από τα Α και Β ισούται με $\frac{MA}{MB}$. Λέμε ότι **το Μ** ***διαιρεί εσωτερικά*** **το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν και μόνο αν $\frac{MA}{MB}$** = λ. Για το σημείο Μ ισχύει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση

Το σημείο Μ είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Πράγματι, αν Μ΄ εσωτερικό σημείο του ΑΒ ώστε $\frac{Μ'Α}{Μ'Β}=λ$, τότε έχουμε:

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{ΜΆ}{Μ΄Β} \Leftrightarrow \frac{ΜΑ}{ΜΑ+ΜΒ}=\frac{ΜΆ}{ΜΆ+Μ΄Β} \Leftrightarrow$$

$$\frac{ΜΑ}{ΑΒ}=\frac{ΜΆ}{ΑΒ} \Leftrightarrow ΜΑ=ΜΆ,$$

οπότε το σημείο Μ ταυτίζεται με το σημείο Μ′.

Αν $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=λ$, τότε

$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{λ}{1} \Leftrightarrow \frac{ΜΑ}{ΜΑ+ΜΒ}=\frac{λ}{λ+1} \Leftrightarrow \boxed{ΜΑ=\frac{λ}{λ+1}ΑΒ} \text{ και}$$

$$ΜΒ=ΑΒ-ΜΑ=ΑΒ-\frac{λ}{λ+1}ΑΒ \Leftrightarrow \boxed{ΜΒ=\frac{1}{λ+1}ΑΒ}.$$

2) Αν Μ σημείο στην προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε πάλι ο λόγος των αποστάσεών του από τα Α και Β ισούται με $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}$. Λέμε ότι **το Μ** ***διαιρεί εξωτερικά*** **το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, αν και μόνο αν** $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=λ$. Ανάλογα αποδεικνύεται ότι και σε αυτή την περίπτωση, **το σημείο Μ είναι μοναδικό**.

Διερεύνηση

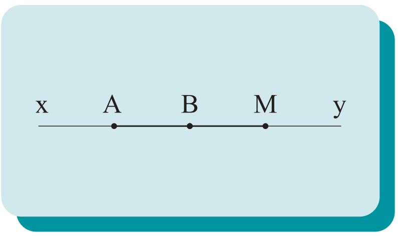
(i) Αν λ=1, τότε προφανώς δεν υπάρχει σημείο Μ που να διαιρεί εξωτερικά το ΑΒ σε λόγο λ=1, αφού ΜΑ ≠ ΜΒ. Στην περίπτωση αυτή το Μ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος.

(ii) Αν λ>1, τότε $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}>1 \Leftrightarrow ΜΑ>ΜΒ$, οπότε το Μ βρίσκεται στην προέκταση του ΑΒ, προς το μέρος του Β (σχ.5). Στην περίπτωση αυτή έχουμε:

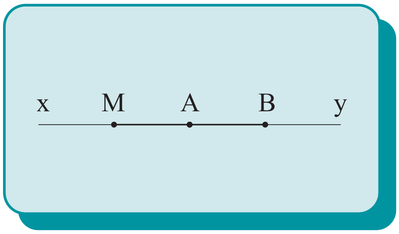
$$\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=λ \Leftrightarrow \frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{λ}{1} \Leftrightarrow \frac{ΜΑ}{ΜΑ-ΜΒ}=\frac{λ}{λ-1} \Leftrightarrow \frac{ΜΑ}{ΑΒ}=\frac{λ}{λ-1} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{ΜΑ=\frac{λ}{λ-1}ΑΒ} \text{ και } ΜΒ=ΜΑ-ΑΒ=\frac{λ}{λ-1}ΑΒ-ΑΒ \Leftrightarrow$$

$$\boxed{ΜΒ=\frac{1}{λ-1}ΑΒ}.$$



Σχήμα 5



Σχήμα 6

(iii) Αν $\lambda < 1$ τότε $\frac{MA}{MB} < 1 \Leftrightarrow MA < MB$, οπότε το Μ βρίσκεται στην προέκταση του ΑΒ, προς το μέρος του Α (σχ.6). Όπως παραπάνω βρίσκουμε ότι

$$MA = \frac{\lambda}{1-\lambda}AB \quad \text{και} \quad MB = \frac{1}{1-\lambda}AB.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Δεχόμαστε συμβατικά πως, όταν λέμε ότι το σημείο Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε λόγο λ, εννοούμε

$$\frac{MA}{MB} = \lambda \text{ και όχι } \frac{MB}{MA} = \lambda.$$

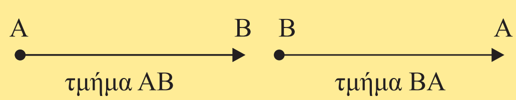
(iv) Οριακές θέσεις

α) Όταν το σημείο Μ τείνει στο Α, το τμήμα ΜΑ τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο μηδέν.
β) Όταν το σημείο Μ τείνει στο Β, το τμήμα ΜΒ τείνει στο μηδενικό ευθύγραμμο τμήμα, οπότε ο λόγος λ τείνει στο άπειρο.
γ) Όταν το σημείο Μ απομακρύνεται απεριόριστα, τα τμήματα ΜΑ και ΜΒ τείνουν να ταυτιστούν, οπότε ο λόγος λ τείνει στη μονάδα.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ

• *Αν Ο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, τότε το σημείο Μ τέτοιο ώστε* $\frac{MA}{MB} = \lambda$ *βρίσκεται μεταξύ Ο και Α όταν* $\lambda<1$ *και μεταξύ Ο και Β όταν* $\lambda>1$.

• *Αν* $\frac{MB}{MA} = \lambda$, *λέμε ότι το Μ διαιρεί το ευθύγραμμο τμήμα ΒΑ σε λόγο λ. Δηλαδή θεωρούμε ότι τα άκρα Α και Β του τμήματος είναι* ***διατεταγμένα***. *Ένα τέτοιο ευθύγραμμο τμήμα λέγεται* ***προσανατολισμένο.***



Σχήμα 7

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να ορίσετε τους παρακάτω λόγους:*
i) της υποτείνουσας ορθογώνιου τριγώνου προς την αντίστοιχη διάμεσο,
ii) μιας εγγεγραμμένης γωνίας προς την αντίστοιχη επίκεντρη,
iii) της διαμέτρου ενός κύκλου, προς την ακτίνα του,
iv) μιας ορθής γωνίας προς μια γωνία ισόπλευρου τριγώνου.

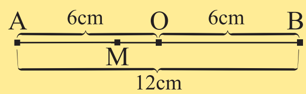
2. *Στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = 10α και ΑΓ = 2α. Να βρεθούν οι λόγοι:*

i) ΑΒ προς ΑΓ, ii) ΑΓ προς ΑΒ,
iii) ΒΓ προς ΑΒ, iv) ΑΓ προς ΒΓ.

3. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και σημείο του Γ έτσι ώστε* $\frac{A\Gamma}{\Gamma B} = \frac{1}{2}$.

Τότε ο λόγος $\frac{B\Gamma}{AB}$ *είναι: i) 2 ii) 3 iii)* $\frac{3}{2}$ *iv)* $\frac{2}{3}$
v) κανένα από τα παραπάνω.
(Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας).

4. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 12 cm και το μέσο του Ο. Να βρεθεί σημείο Μ του ΑΟ, ώστε τα σημεία Μ και Β να διαιρούν εσωτερικά και εξωτερικά αντίστοιχα το τμήμα ΑΟ στον ίδιο λόγο.*



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Οι γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 4, 3, 2. Να βρεθούν οι γωνίες του τριγώνου σε μοίρες.*

2. *Ο λόγος μιας γωνίας ω προς την παραπληρωματική της είναι $\frac{1}{3}$. Να βρεθεί η γωνία ω.*

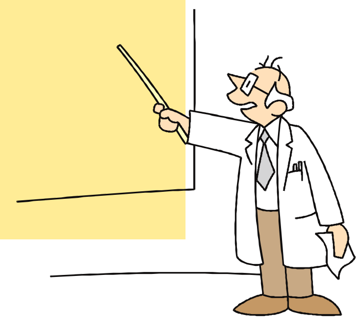
3. *Οι πλευρές ενός τριγώνου είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 6, 3, 4. Αν η περίμετρος του τριγώνου είναι 65cm, να βρεθούν τα μήκη των πλευρών του.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Οι εξωτερικές γωνίες ενός τριγώνου είναι ανάλογες των αριθμών 2, 3 και 4. Να υπολογισθούν οι εσωτερικές του γωνίες.*

2. *Σε ευθεία ε παίρνουμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ, ώστε ΑΒ = 6cm, ΒΓ = 12cm, ΓΔ = 2cm. Να βρεθεί σημείο Μ του ΒΓ, το οποίο διαιρεί εσωτερικά τα τμήματα ΑΔ και ΒΓ στον ίδιο λόγο.*

3. *Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των αναλογιών, να διαιρέσετε δοσμένο τμήμα ΑΒ = α σε δύο τμήματα, τα οποία έχουν λόγο $\frac{3}{4}$.*



7.7 Θεώρημα του Θαλή

Είδαμε στην § 5.6 ότι αν παράλληλες ευθείες τέμνουν δύο άλλες ευθείες και ορίζουν **ίσα** τμήματα πάνω στη μία, θα ορίζουν ίσα τμήματα και πάνω στην άλλη. Τα παραπάνω γενικεύονται για οποιονδήποτε λόγο στο επόμενο θεώρημα που είναι γνωστό ως θεώρημα του Θαλή.

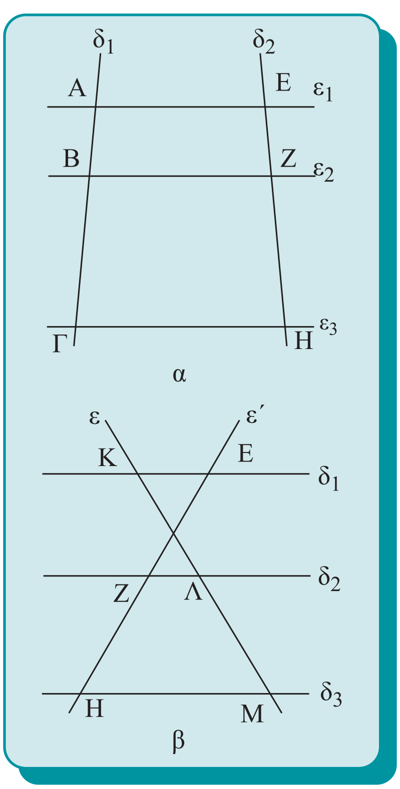
Θεώρημα

Αν τρεις τουλάχιστον παράλληλες ευθείες τέμνουν δυο άλλες ευθείες, ορίζουν σε αυτές τμήματα ανάλογα.

Δηλαδή:

Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$, τότε $\frac{AB}{EZ} = \frac{B\Gamma}{ZH} = \frac{A\Gamma}{EH}$ (σχ.8α).

Αν $\delta_1 // \delta_2 // \delta_3$, τότε $\frac{K\Lambda}{EZ} = \frac{\Lambda M}{ZH} = \frac{KM}{EH}$ (σχ.8β).



Σχήμα 8