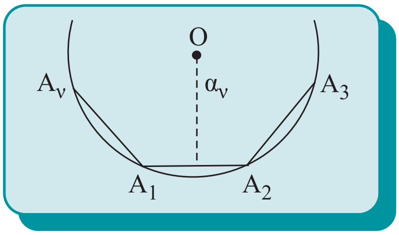
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου

11.6 Προσέγγιση του εμβαδού κύκλου με κανονικά πολύγωνα



Σχήμα 17

Έστω ένας κύκλος (O,R). Ο κύκλος μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν τον ***κυκλικό δίσκο*** με κέντρο O και ακτίνα R. Στην παράγραφο 11.4 είδαμε ότι τα εγγεγραμμένα ή τα περιγεγραμμένα σε έναν κύκλο κανονικά πολύγωνα τείνουν να ταυτισθούν με τον κύκλο, καθώς το πλήθος των πλευρών τους διπλασιάζεται. Ο μοναδικός θετικός αριθμός Ε προς τον οποίο πλησιάζουν ολοένα και περισσότερο, τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, λέγεται ***εμβαδόν του κυκλικού δίσκου*** ή απλούστερα ***εμβαδόν του κύκλου***. Επειδή ο Ε προσεγγίζεται από το εμβαδόν εγγεγραμμένων ή περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων, ας θεωρήσουμε ένα κανονικό ν-γωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R). Τότε το εμβαδόν E_ν δίνεται από τον τύπο

$$E_\nu = \frac{1}{2} P_\nu \alpha_\nu \quad (1).$$

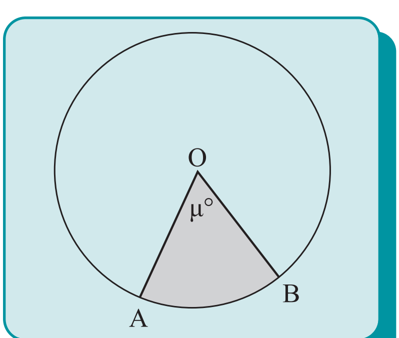
Από το σχ.17 φαίνεται ότι καθώς το ν διπλασιάζεται το α_ν προσεγγίζει την ακτίνα R και επειδή το P_ν προσεγγίζει το μήκος L του κύκλου, από την (1) προκύπτει ότι το E_ν προσεγγίζει το $\frac{1}{2}L \cdot R = \frac{1}{2}2\pi R \cdot R = \pi R^2$. Έτσι έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Το εμβαδόν Ε ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση

$$E = \pi R^2.$$

11.7 Εμβαδόν κυκλικού τομέα και κυκλικού τμήματος

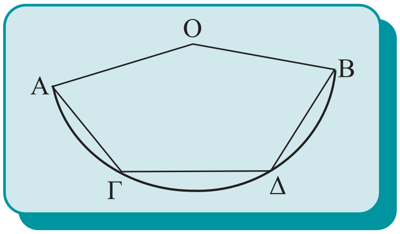


Σχήμα 18

• Κυκλικός Τομέας

Θεωρούμε έναν κύκλο (O,R) και μία επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ (σχ.18). Το σύνολο των κοινών σημείων της επίκεντρης γωνίας $A\hat{O}B$ και του κυκλικού δίσκου (O,R) λέγεται ***κυκλικός τομέας*** κέντρου O και ακτίνας R. Ο κυκλικός αυτός τομέας συμβολίζεται $O\,\overset{\frown}{AB}$. Αν η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι μ^o, λέμε ότι και ο κυκλικός τομέας $O\overset{\frown}{A}B$ είναι $μ^o$. Το εμβαδόν του κυκλικού τομέα ορίζεται ανάλογα με το εμβαδόν του κύκλου και συμβολίζεται $(O\overset{\frown}{A}B)$.

Επειδή ο κυκλικός δίσκος είναι κυκλικός τομέας 360^o με εμβαδόν $πR^2$, ο κυκλικός τομέας $1°$ έχει εμβαδό $\frac{πR^2}{360}$ και άρα ένας τομέας $μ^o$ θα έχει εμβαδόν $\frac{πR^2μ}{360}$. Ώστε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{A}B$ $μ^o$ και ακτίνας R δίνεται από την ισότητα:



Σχήμα 19

$$\boldsymbol{(O\overset{\frown}{A}B) = \frac{πR^2μ}{360}}.$$

Επίσης, επειδή ο κυκλικός δίσκος (O, R) είναι τομέας 2π rad με εμβαδόν $πR^2$, ένας τομέας α rad θα έχει εμβαδόν

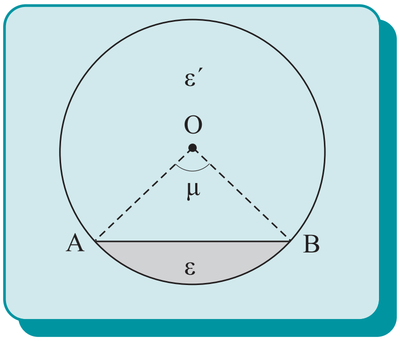
$$\frac{πR^2}{2π}\cdot α = \frac{1}{2}αR^2.$$

Επομένως, το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{A}B$ α rad και ακτίνας R δίνεται από την ισότητα

$$\boldsymbol{(O\overset{\frown}{A}B) = \frac{1}{2}αR^2}$$

• Κυκλικό τμήμα

Έστω ένας κύκλος (O,R) και μια χορδή του AB (σχ.20). Η AB χωρίζει τον κυκλικό δίσκο σε δύο μέρη που βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής. Καθένα από αυτά τα μέρη λέγεται ***κυκλικό τμήμα.*** Το εμβαδόν ε του κυκλικού τμήματος που περιέχεται στην κυρτή γωνία $A\hat{O}B$ υπολογίζεται με τη βοήθεια της ισότητας



Σχήμα 20

$$\boldsymbol{ε = (O\overset{\frown}{A}B) - (OAB)},$$

δηλαδή αφαιρώντας από το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{A}B$ το εμβαδόν του τριγώνου OAB.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η *(Μηνίσκοι του Ιπποκράτη)*

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°). Με διαμέτρους ΒΓ, ΑΒ και ΑΓ γράφουμε ημικύκλια στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α). Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των εμβαδών των σχηματιζόμενων μηνίσκων είναι ίσο με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

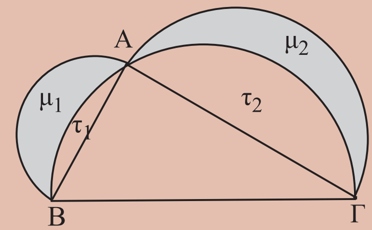
(*Μηνίσκος* είναι το σχήμα που «περικλείεται» από δύο τόξα που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της**).**

Απόδειξη

Συμβολίζουμε με $μ_1$, $μ_2$ τα εμβαδά των σχηματιζόμενων μηνίσκων, $τ_1$, $τ_2$ τα εμβαδά των κυκλικών τμημάτων με χορδές ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, στο ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ. Έχουμε

$$\mu_1 = (\mu_1 + \tau_1) - \tau_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2 - \tau_1 = \frac{1}{8}\pi AB^2 - \tau_1 \text{ και}$$

$$\mu_2 = (\mu_2 + \tau_2) - \tau_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{A\Gamma}{2}\right)^2 - \tau_2 = \frac{1}{8}\pi A\Gamma^2 - \tau_2,$$



Σχήμα 21

από τις οποίες, χρησιμοποιώντας και τη σχέση $AB^2+A\Gamma^2=B\Gamma^2$ βρίσκουμε

$$\mu_1 + \mu_2 = \frac{1}{8}\pi(AB^2 + A\Gamma^2) - (\tau_1 + \tau_2) =$$

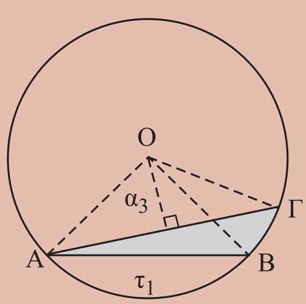
$$= \frac{1}{8}\pi(B\Gamma)^2 - (\tau_1 + \tau_2) = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 - (\tau_1 + \tau_2) = (AB\Gamma).$$

ΣΧΟΛΙΟ

Επειδή $\mu_1 + \mu_2$=(ΑΒΓ) και κάθε τρίγωνο τετραγωνίζεται, προκύπτει ότι το άθροισμα $\mu_1 + \mu_2$ τετραγωνίζεται. Οι μηνίσκοι αυτοί αποτελούν το πρώτο μη ευθύγραμμο σχήμα, το οποίο τετραγωνίσθηκε από τον Ιπποκράτη τον Χίο (γεννήθηκε περί το 470 π.Χ.). Ο Ιπποκράτης επίσης πέτυχε τον τετραγωνισμό και άλλων δύο περιπτώσεων μηνίσκων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και δυο χορδές του $AB = R\sqrt{2}$ και $A\Gamma = R\sqrt{3}$ (σχ.22). Να υπολογισθεί η περίμετρος και το εμβαδόν Ε του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.



Σχήμα 22

Λύση

• Επειδή $AB = R\sqrt{2}$ και $A\Gamma = R\sqrt{3}$, έχουμε αντίστοιχα $AB=\lambda_4$ και $A\Gamma=\lambda_3$, οπότε $A\hat{O}B = 90°$ και $A\hat{O}\Gamma = 120°$ και επομένως $B\hat{O}\Gamma = 30°$. Έτσι το μήκος ℓ του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι $\ell = \dfrac{\pi R \cdot 30}{180} = \dfrac{\pi R}{6}$. Άρα η περίμετρος S του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ είναι

$$S = R\sqrt{2} + R\sqrt{3} + \frac{\pi R}{6} = R\left(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right).$$

• Για το εμβαδόν Ε έχουμε: $E = (O\overset{\frown}{A\Gamma}) - (OA\Gamma) - \tau_1$ (1), όπου τ_1 το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος με χορδή ΑΒ. Έχουμε:

$$(O\overset{\frown}{A\Gamma}) = \frac{\pi R^2 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3},\ (OA\Gamma) = \frac{1}{2}\lambda_3\alpha_3 = \frac{1}{2}R\sqrt{3}\frac{R}{2} = \frac{R^2\sqrt{3}}{4} \quad \text{και}$$

$$\tau_1 = (O\overset{\frown}{AB}) - (OAB) = \frac{\pi R^2 90}{360} - \frac{1}{2}\lambda_4\alpha_4 = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{1}{2}R\sqrt{2}\frac{R\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi R^2}{4} - \frac{R^2}{2},$$

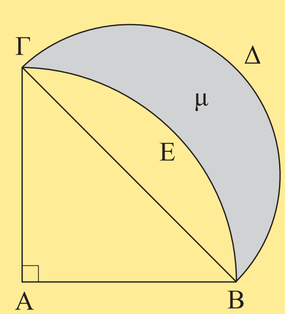
οπότε αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι $E = \dfrac{R^2}{12}(\pi + 6 - 3\sqrt{3})$.

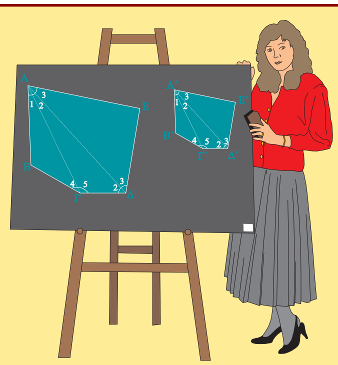
11.8 Τετραγωνισμός κύκλου

Τετραγωνισμός κύκλου λέγεται η κατασκευή, με κανόνα και διαβήτη, ενός τετραγώνου ισοδύναμου με το δοσμένο κύκλο. Έστω R η ακτίνα ενός κύκλου και Ε το εμβαδόν του. Επειδή $E = \frac{1}{2}L \cdot R$, όπου L το μήκος του κύκλου, προκύπτει ότι ο κύκλος είναι ισοδύναμος με τρίγωνο, που έχει βάση L και ύψος R. Κάθε τρίγωνο όμως είναι ισοδύναμο με τετράγωνο. Επομένως ο τετραγωνισμός του κύκλου ανάγεται στην κατασκευή του L, αφού το R είναι ένα δοσμένο τμήμα. Επειδή όμως $L=2\pi R$, η κατασκευή του ανάγεται στην κατασκευή τμήματος μήκους π (αφού για $R = \frac{1}{2}$ είναι $L = \pi$). Για να είναι η κατασκευή αυτή δυνατή, όπως έχει αποδειχθεί, θα έπρεπε ο π να είναι ρίζα πολυωνυμικής εξίσωσης με ακέραιους συντελεστές, δηλαδή αλγεβρικός αριθμός, βαθμού 2^{ν}, όπου ν φυσικός. Όμως, ο Γερμανός Μαθηματικός Lindemann, το 1882, (ιστορικό σημείωμα, σελ. 254) απέδειξε ότι ο π δεν είναι αλγεβρικός αριθμός αλλά υπερβατικός και επομένως δεν κατασκευάζεται γεωμετρικά. Αποδείχθηκε έτσι το αδύνατο της γεωμετρικής λύσης του προβλήματος του τετραγωνισμού του κύκλου.

Δραστηριότητα

Στο παρακάτω σχήμα, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, το $\overset{\frown}{B\Delta\Gamma}$ ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ και το $\overset{\frown}{\Gamma E B}$ τόξο του κύκλου (Α, ΑΒ). Να αποδείξετε ότι ο σχηματιζόμενος μηνίσκος τετραγωνίζεται.
(Απάντηση: (μ)= (ΑΒΓ))





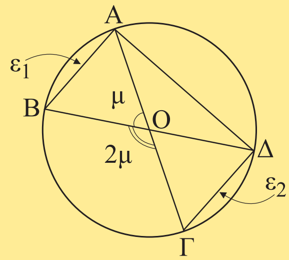
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Αντιστοιχίστε κάθε μέγεθος της στήλης Α με την τιμή του στη στήλη Β.*

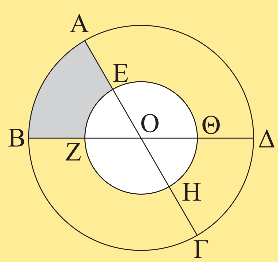
Α	Β
	$2\pi R^2$
Εμβαδόν κυκλικού δίσκου ακτίνας R	$\pi R^2 \dfrac{\mu}{180}$
Εμβαδόν κυκλικού τομέα μ° (σε κύκλο ακτίνας R)	πR^2
Εμβαδόν κυκλικού τομέα α rad (σε κύκλο ακτίνας R)	$\dfrac{1}{2}\alpha R^2$
	$\pi R^2 \dfrac{\mu}{360}$

2. *Με βάση το παρακάτω σχήμα χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*



i) $(O\overset{\frown}{AB}) = (O\overset{\frown}{\Gamma\Delta})$ Σ   Λ
ii) $(O\overset{\frown}{B\Gamma}) = (O\overset{\frown}{\Delta A})$ Σ   Λ
iii) $(O\overset{\frown}{B\Gamma}) = 2(O\overset{\frown}{AB})$ Σ   Λ
iv) $(OA\Delta) = 2(OAB)$ Σ   Λ
v) $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ Σ   Λ
vi) $AB = \lambda_6$ Σ   Λ

3. *Στο παρακάτω σχήμα υπάρχουν δύο ομόκεντροι κύκλοι με ακτίνες ΟΕ=R και ΟΑ=2R. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμιά από τις παρακάτω ισότητες και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*



i) $\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \ell_{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}$ Σ   Λ
ii) $\ell_{\overset{\frown}{AB}} = \ell_{\overset{\frown}{EZ}}$ Σ   Λ
iii) $\ell_{\overset{\frown}{AB}} = 2\ell_{\overset{\frown}{\Gamma\Delta}}$ Σ   Λ
iv) (ΑΒΖΕ) = (ΓΔΘΗ)   Σ   Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

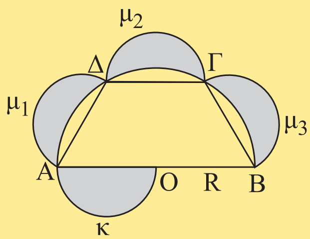
1. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ισόπλευρο τρίγωνο εγγεγραμμένο σε αυτόν. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.*

2. *Δίνεται κύκλος (Κ) και τόξο του $\overset{\frown}{AB} = 60°$. Αν το τόξο $\overset{\frown}{AB}$ έχει μήκος 4π cm, να βρείτε το εμβαδόν του κύκλου (Κ).*

3. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ πλευράς α. Γράφουμε τα τόξα των κύκλων (Α, α), (Β, α) και (Γ, α) που περιέχονται στις γωνίες $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.*

4. *Στο διπλανό σχήμα έχει σχεδιαστεί ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ=2R και εξωτερικά του τα ίσα ημικύκλια με διαμέτρους ΟΑ, ΑΔ, ΔΓ και ΓΒ. Αν (μ_1), (μ_2), (μ_3) είναι τα εμβαδά των τριών σχηματιζόμενων μηνίσκων και (κ) το εμβαδόν του ημικυκλίου, να αποδείξετε ότι*

$$(\mu_1)+(\mu_2)+(\mu_3)+(\kappa) = (AB\Gamma\Delta).$$

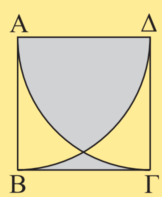


5. *Τρεις ίσοι κύκλοι ακτίνας R εφάπτονται εξωτερικά ανά δύο στα σημεία Α, Β και Γ. Να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του καμπυλόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ, ως συνάρτηση του R.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ακτίνα του ΟΑ. Στην προέκταση της ΟΑ προς το Α παίρνουμε σημείο Β, ώστε ΟΑ = ΑΒ. Αν ΒΓ είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το Β προς τον κύκλο, να βρείτε την περίμετρο και το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΒΓ.*

2. *Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α και τα τόξα $\overset{\frown}{B\Delta}$ και $\overset{\frown}{A\Gamma}$ των κύκλων (Α,α) και (Δ,α) αντίστοιχα. Να βρεθεί το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του τετραγώνου.*



3. *Δυο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{2}$. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.*

4. *Δίνεται ένα ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ και στο εσωτερικό του τα ημικύκλια διαμέτρων ΑΓ και ΓΒ, όπου Γ σημείο της διαμέτρου ΑΒ. Η κάθετος της ΑΒ στο Γ τέμνει το αρχικό ημικύκλιο στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των τριών ημικυκλίων* ***(άρβυλος του Αρχιμήδη)*** *είναι ίσο με το εμβαδόν του κύκλου διαμέτρου ΓΔ.*

5. *Δίνεται κύκλος (Ο,R) και τόξο του $\overset{\frown}{AB} = 60°$. Να βρεθεί το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου στον κυκλικό τομέα $O\overset{\frown}{AB}$.*

Σύνθετα θέματα

1. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Οι πλευρές ΑΒ και ΒΓ είναι αντίστοιχα πλευρές κανονικού εξαγώνου και ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο .Να υπολογισθούν:*

i) το μήκος της πλευράς ΑΓ,

ii) ο λόγος των εμβαδών του τριγώνου ΑΒΓ και του κύκλου (Ο,R)

iii) το εμβαδόν των τριών κυκλικών τμημάτων που ορίζονται από τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ και περιέχονται στις αντίστοιχες κυρτές γωνίες.

2. *Δίνεται κύκλος (Ο,R). Με κέντρο τυχαίο σημείο του και ακτίνα την πλευρά του τετραγώνου του εγγεγραμμένου σε αυτόν, γράφουμε κύκλο. Να βρεθεί το εμβαδόν του κοινού μέρους των δύο κυκλικών δίσκων.*

3. *Δύο ίσοι κύκλοι ακτίνας R έχουν διάκεντρο ίση με $R\sqrt{3}$. Να βρείτε, ως συνάρτηση του R, το εμβαδόν του κοινού τους μέρους.*

4. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και μια διάμετρός του ΑΒ. Με κέντρο το μέσο Γ του ενός ημικυκλίου και ακτίνα ΓΑ γράφουμε κύκλο, ο οποίος ορίζει με το άλλο ημικύκλιο τον μηνίσκο, έστω μ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μ ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.*

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο, R) και έστω Κ, Λ, Μ, Ν, Ρ, Σ τα μέσα των πλευρών του.*

i) Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝΡΣ είναι κανονικό εξάγωνο με κέντρο το Ο.

ii) Να αποδείξετε ότι (ΚΛΜΝΡΣ) = $\frac{3}{4}$ (ΑΒΓΔΕΖ).

iii) Να βρεθεί, ως συνάρτηση του R, το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου στο ΚΛΜΝΡΣ.

2. *Έστω κύκλος (Ο, R) και μία χορδή του $AB=\lambda_\nu$. Αν ο κύκλος (O, α_4) τέμνει τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ στα Α΄ και Β΄ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι*

i) το εμβαδόν ε του μικτόγραμμου τετραπλεύρου ΑΒΒ΄Α΄ (με δύο πλευρές τόξα) ισούται με το εμβαδόν του κυκλικού τομέα $O\overset{\frown}{A'B'}$ και

ii) $2\nu\varepsilon=\pi R^2$.

3. *Με βάσεις τις πλευρές ενός ν-γώνου και στο εξωτερικό του κατασκευάζουμε ν ορθογώνια με το ίδιο ύψος υ. Συνδέουμε τις εξωτερικές πλευρές τους με τόξα κύκλων που γράφουμε με κέντρα τις κορυφές και ακτίνα υ. Να βρεθεί το άθροισμα των εμβαδών των ν κυκλικών τομέων που σχηματίζονται.*

4. *Στο εσωτερικό τετραγώνου γράφουμε τέσσερις ίσους κύκλους που εφάπτονται μεταξύ τους εξωτερικά και εφάπτονται των πλευρών του τετραγώνου. Να υπολογισθεί , ως συνάρτηση της πλευράς α του τετραγώνου το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τους τέσσερις κύκλους.*

5. *Στο κυκλικό οικόπεδο ακτίνας R = 40m, του παρακάτω σχήματος, το εγγεγραμμένο τετράγωνο έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν και πρόκειται να πλακοστρωθεί. Στα τέσσερα κυκλικά τμήματα θα τοποθετηθούν ισάριθμες κυκλικές γλάστρες με το μέγιστο δυνατό εμβαδόν επίσης, ενώ το υπόλοιπο θα φυτευθεί με γκαζόν. Να βρεθεί το εμβαδόν:*

i) του μέρους που θα πλακοστρωθεί, ii) του μέρους που θα καλύπτουν οι γλάστρες, iii) του μέρους που θα φυτευθεί με γκαζόν.

6. *Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο έχει πλευρά α = 50 m.*

Να βρεθεί: i) το εμβαδόν του εγγεγραμμένου κύκλου, ii) το εμβαδόν καθενός από τους τέσσερις κύκλους που εφάπτονται εσωτερικά του τετραγώνου και εξωτερικά του εγγεγραμμένου κύκλου.