Μήκος κύκλου

11.4 Προσέγγιση του μήκους του κύκλου με κανονικά πολύγωνα

Με τη βοήθεια της περιμέτρου κανονικών πολυγώνων προσεγγίζουμε στη συνέχεια την έννοια του μήκους κύκλου. Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O,R) (σχ.13) και ας εγγράψουμε σε αυτόν διαδοχικά ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα κανονικό 6-γωνο, ένα κανονικό 12-γωνο και γενικά ένα πολύγωνο με διπλάσιο κάθε φορά πλήθος πλευρών από το προηγούμενο.

Καθώς ο αριθμός των πλευρών των κανονικών πολυγώνων διπλασιάζεται, από το σχήμα φαίνεται ότι: “το κανονικό πολύγωνο τείνει να ταυτισθεί με τον κύκλο”.

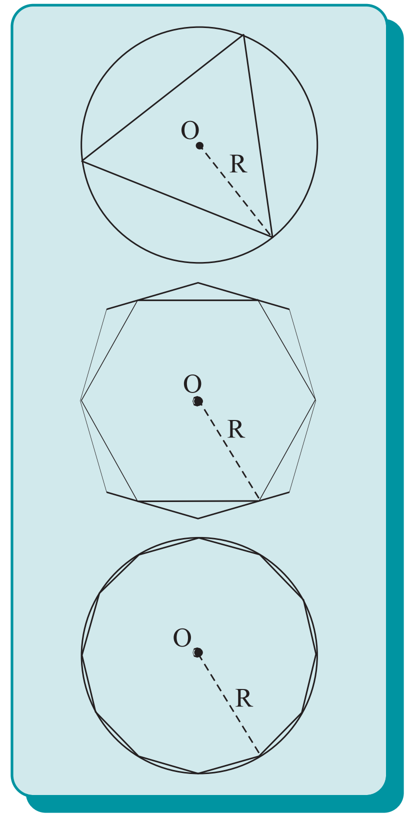
Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε και αν αντί εγγεγραμμένων θεωρήσουμε κανονικά πολύγωνα περιγεγραμμένα στον κύκλο (O,R) (σχ.14) και διπλασιάζουμε διαρκώς το πλήθος των πλευρών τους. Αν θεωρήσουμε λοιπόν την ακολουθία (P_ν) των περιμέτρων των κανονικών πολυγώνων των εγγεγραμμένων στον κύκλο (O,R) και την ακολουθία (P'_ν) των περιμέτρων των περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων γύρω από τον ίδιο κύκλο, τότε αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός θετικός αριθμός L μεγαλύτερος όλων των όρων της ακολουθίας (P_ν) και μικρότερος όλων των όρων της (P'_ν) με την εξής ιδιότητα: καθώς το ν διπλασιάζεται, οι όροι των ακολουθιών (P_ν) και (P'_ν) προσεγγίζουν όλο και περισσότερο τον αριθμό L. Ο αριθμός L (που είναι το κοινό όριο των ακολουθιών και ανεξάρτητος από την επιλογή κανονικών πολυγώνων) λέγεται ***μήκος του κύκλου*** (O,R).

Ο Ιπποκράτης ο Χίος απέδειξε πρώτος ότι ο λόγος $\frac{L}{2R}$ του μήκους του κύκλου προς τη διάμετρό του είναι σταθερός, δηλαδή είναι ο ίδιος για κάθε κύκλο. Η σταθερή αυτή τιμή του λόγου $\frac{L}{2R}$ συμβολίζεται διεθνώς με το Ελληνικό γράμμα π (αρχικό της λέξης περιφέρεια) δηλαδή $\frac{L}{2R} = \pi$, οπότε προκύπτει ότι το μήκος L του κύκλου ακτίνας R δίνεται από τη σχέση

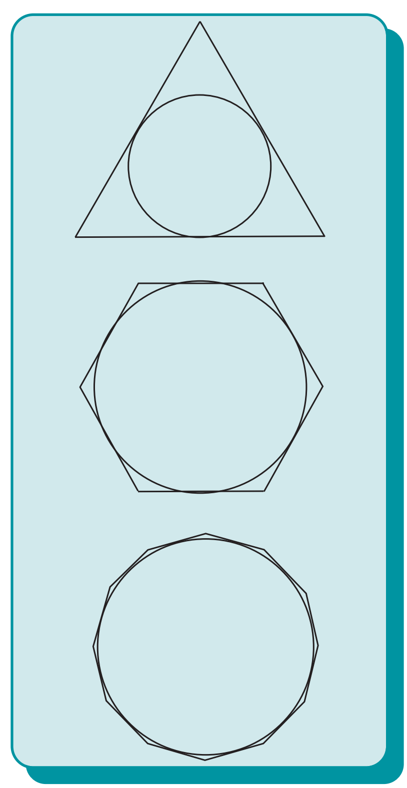
$$\mathbf{L = 2\pi R}\,.$$

Ο αριθμός π είναι ένας άρρητος, υπερβατικός αριθμός και μια προσέγγισή του, που στην πράξη χρησιμοποιείται, είναι $\pi \cong 3{,}14$.

Ο Αρχιμήδης χρησιμοποιούσε ως προσέγγιση του π το $\frac{22}{7}$.



Σχήμα 13

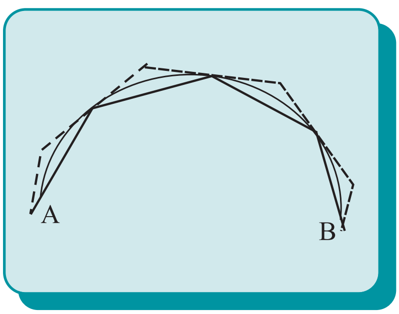

Σχήμα 14

11.5 Μήκος τόξου

Έστω ένα τόξο $\overset{\frown}{AB}$ ενός κύκλου (O,R) (σχ.15). Μία τεθλασμένη με άκρα τα σημεία A, B και τις άλλες κορυφές της σημεία του τόξου λέγεται ***εγγεγραμμένη*** στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Στην περίπτωση που οι πλευρές της είναι ίσες, λέγεται κανονική τεθλασμένη.

Μια τεθλασμένη με άκρα τα A, B και πλευρές εφαπτόμενες του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ λέγεται ***περιγεγραμμένη*** τεθλασμένη στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Η έννοια της κανονικής περιγεγραμμένης ορίζεται, όπως στην περίπτωση της εγγεγραμμένης. Το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$ κύκλου (O,R) ορίζεται όπως και το μήκος του κύκλου. Δηλαδή το ***μήκος του τόξου*** $\overset{\frown}{AB}$ είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός ℓ τον οποίο προσεγγίζουν ολοένα και περισσότερο τα μήκη P_ν και P'_ν των κανονικών τεθλασμένων γραμμών των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων αντίστοιχα στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$, καθώς το ν διπλασιάζεται. Επειδή ο κύκλος είναι τόξο 360^o με μήκος $2\pi R$, το τόξο 1^o θα έχει μήκος $\frac{2\pi R}{360}$ οπότε ένα τόξο μ^o θα έχει μήκος

$$\boxed{\ell = \frac{\pi R \mu}{180}} \quad (1).$$



Σχήμα 15

Επίσης, ένα τόξο κύκλου με μήκος R λέγεται ***ακτίνιο*** (rad). Άρα ένα τόξο α rad έχει μήκος αR, δηλαδή

$$\boxed{\ell = \alpha R} \quad (2).$$

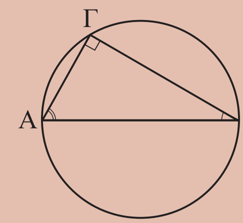
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180}$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Σε κύκλο (O,R) θεωρούμε διάμετρο AB και τις χορδές ΑΓ και ΒΓ, ώστε ΑΓ=2cm και ΒΓ = $2\sqrt{3}$cm. Να βρεθεί το μήκος του κύκλου και τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma B}$, που είναι μικρότερα του ημικυκλίου.

Λύση

Επειδή η AB είναι διάμετρος, η γωνία $A\hat{\Gamma}B$ θα είναι ορθή, οπότε από το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ έχουμε $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$ ή $(2R)^2 = 2^2 + (2\sqrt{3})^2$ ή $4R^2 = 16$, δηλαδή R = 2. Το μήκος L του κύκλου θα είναι $L = 2\pi R = 4\pi$ cm. Επειδή $A\Gamma = 2 = \frac{AB}{2}$, θα είναι $\hat{B} = 30°$, οπότε $\overset{\frown}{A\Gamma} = 60°$ και επομένως το μήκος του θα είναι:



Σχήμα 16

$$\ell_1 = \frac{\pi R \mu}{180} = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 60}{180} = \frac{2}{3}\pi \text{ cm}.$$

Τέλος, αφού $\hat{A} = 60°$, θα είναι $\overset{\frown}{B\Gamma} = 120°$ και το μήκος του, θα είναι

$$\ell_2 = \frac{\pi \cdot 2 \cdot 120}{180} = \frac{4}{3}\pi \text{ cm}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Αντιστοιχίστε κάθε μέγεθος της στήλης A με την τιμή του στη στήλη B.*

A	B
Μήκος κύκλου ακτίνας R	αR $2\pi R$
Μήκος τόξου μ^o (σε κύκλο ακτίνας R)	$\frac{\pi R\mu}{360}$ $2\alpha R$
Μήκος τόξου αrad (σε κύκλο ακτίνας R)	$\frac{\pi R\mu}{180}$

2. *Το μήκος L τόξου, κύκλου ακτίνας R με χορδή λ_6 είναι:*

α. $6R$ *β.* πR *γ.* $\frac{1}{3}\pi R$ *δ.* $2\pi R$ *ε.* $\frac{1}{3}R$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Πάνω σε ευθεία ε θεωρούμε διαδοχικά τα σημεία Α, Β, Γ και Δ. Αν L_1, L_2, L_3, και L είναι τα μήκη των κύκλων με διαμέτρους ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $L_1 + L_2 + L_3 = L$.*

2. *Να βρείτε το μήκος του εγγεγραμμένου κύκλου σε κανονικό εξάγωνο πλευράς 10cm.*

3. *Να βρεθεί το μήκος του τόξου που αντιστοιχεί στην πλευρά κανονικού 10-γώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ακτίνας 5cm.*

4. *Όταν ένα ποδήλατο διανύει μια απόσταση, ο ένας τροχός του που έχει ακτίνα R κάνει ν στροφές, ενώ ο άλλος, που έχει ακτίνα ρ κάνει 2ν στροφές. Να αποδείξετε ότι $R = 2\rho$.*

5. *Δίνεται κύκλος (O, R) και τα διαδοχικά του σημεία Α, Β, Γ, ώστε να είναι $AB = R\sqrt{2}$ και $B\Gamma = R\sqrt{3}$. Να βρεθούν τα μήκη των τόξων $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$ και $\overset{\frown}{\Gamma A}$, ως συνάρτηση του R.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Με διάμετρο την ακτίνα ΟΑ ενός κύκλου (O, R) γράφουμε κύκλο (Κ) και από το Ο φέρουμε ημιευθεία που τέμνει τον κύκλο (Ο) στο Γ και τον κύκλο (Κ) στο Δ. Να αποδείξετε ότι τα τόξα $\overset{\frown}{A\Gamma}$ και $\overset{\frown}{A\Delta}$ έχουν ίσα μήκη.*

2. *Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου, που εφάπτεται σε δύο ομόκεντρους κύκλους, ισούται με το ημιάθροισμα ή την ημιδιαφορά των μηκών αυτών, όταν αντίστοιχα ο κύκλος αυτός περιέχει στο εσωτερικό του ή όχι το μικρότερο κύκλο.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 13cm, β = 14cm και γ = 15cm. Να βρείτε το μήκος*

i) του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου,

ii) του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται ημικύκλιο (O,R) διαμέτρου ΑΒ. Με διαμέτρους τις ΑΟ και ΟΒ γράφουμε στο εσωτερικό του πρώτου ημικύκλια. Να υπολογίσετε το μήκος του κύκλου, ο οποίος εφάπτεται των τριών αυτών ημικυκλίων, ως συνάρτηση του R.*

2. *Δίνεται τεταρτοκύκλιο $O\overset{\frown}{AB}$. Με διάμετρο την ΟΑ γράφουμε στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου, ημικύκλιο και στη συνέχεια γράφουμε κύκλο (Κ) που εφάπτεται στο ημικύκλιο, στην πλευρά ΟΒ και στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Να αποδείξετε ότι το μήκος του κύκλου (Κ) ισούται με το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{AB}$.*

3. *Να βρείτε το μήκος της γραμμής ΑΒΓΔΕΖ του παρακάτω σχήματος.*