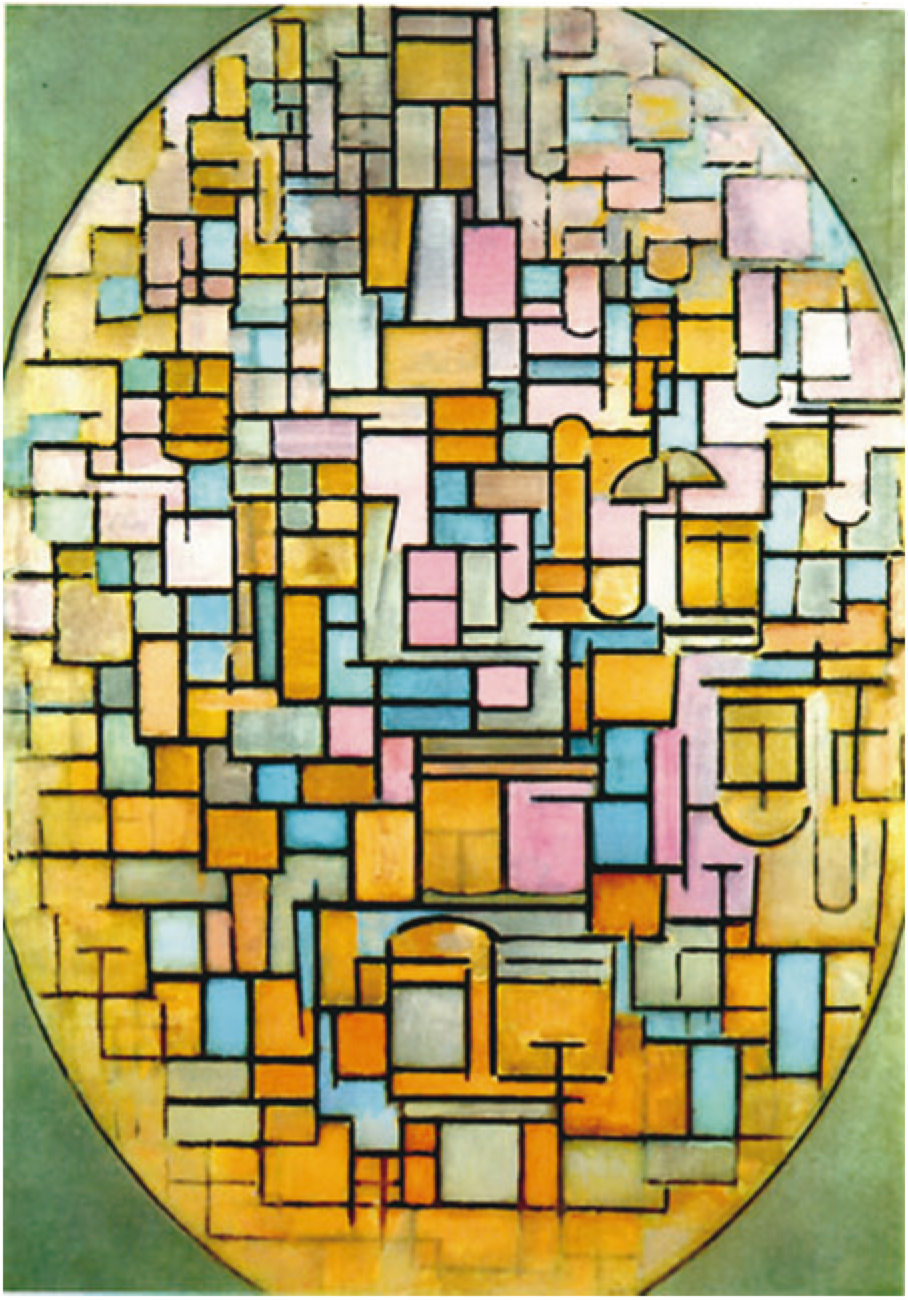
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Μέτρηση Κύκλου

Η μέτρηση του μήκους του κύκλου και του εμβαδού του κυκλικού δίσκου αποτέλεσε ένα σημαντικό θέμα με το οποίο ασχολήθηκαν σπουδαίοι μαθηματικοί της αρχαιότητας (Ιπποκράτης ο Χίος, Αρχιμήδης). Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιήθηκαν τα κανονικά πολύγωνα, τα οποία με τη σειρά τους απασχόλησαν τους μαθηματικούς για περίοδο πάνω από 2.000 χρόνια (Αρχαιότητα - K.F. Gauss).

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια των κανονικών πολυγώνων και μελετάμε βασικές ιδιότητές τους. Εξετάζουμε την εγγραφή ορισμένων βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και υπολογίζουμε τα στοιχεία τους. Στη συνέχεια «προσεγγίζοντας» τον κύκλο με κανονικά πολύγωνα εγγεγραμμένα ή περιγεγραμμένα σε αυτόν και χρησιμοποιώντας τον ορισμό του αριθμού π, βρίσκουμε τύπους για το μήκος κύκλου και τόξου και για το εμβαδόν κυκλικού δίσκου και τομέα.



Piet Mondrian «*Σύνθεση*»

Κανονικά πολύγωνα

11.1 Ορισμός κανονικού πολυγώνου

Όπως είναι γνωστό, ένα τετράγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες. Το ίδιο ισχύει και για ένα ισόπλευρο τρίγωνο. Τέτοια πολύγωνα λέγονται κανονικά.

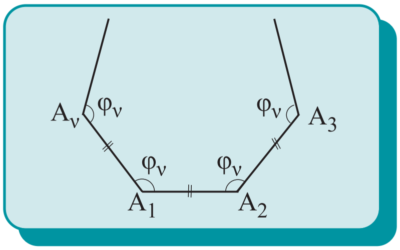
Ορισμός

Ένα πολύγωνο λέγεται *κανονικό,* όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

• Γωνία κανονικού ν-γώνου

Έστω $A_1A_2...A_\nu$ ένα κανονικό πολύγωνο με ν πλευρές και έστω $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \ldots = \hat{A}_\nu = \varphi_\nu$ (σχ.1). Επειδή το άθροισμα των γωνιών κάθε κυρτού ν-γώνου είναι $(\nu - 2)180^o$, θα έχουμε $\nu\varphi_\nu = (\nu - 2) \cdot 180°$ και επομένως

$$\boldsymbol{\varphi_\nu = 180° - \frac{360°}{\nu}}\ .$$



Σχήμα 1

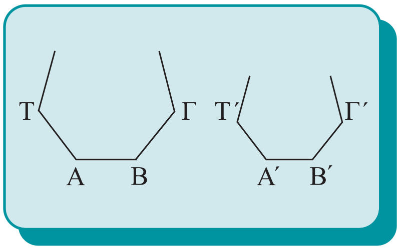
• Ομοιότητα κανονικών πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε τώρα δύο κανονικά πολύγωνα ΑΒΓ...Τ, Α΄Β΄Γ΄...Τ΄ (σχ.2) με τον ίδιο αριθμό πλευρών ν. Τότε η γωνία καθενός είναι $180° - \dfrac{360°}{\nu}$, οπότε έχουμε:

$$\hat{A} = \hat{A}',\ \hat{B} = \hat{B}',\ \ldots,\ \hat{T} = \hat{T}' \qquad (1).$$

Επίσης, αφού ΑΒ=ΒΓ=...= ΤΑ και Α΄Β΄=Β΄Γ΄=...=Τ΄Α΄ θα έχουμε

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \ldots = \frac{TA}{T'A'} \qquad (2).$$



Σχήμα 2

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι τα πολύγωνα ΑΒΓ...Τ και Α΄Β΄Γ΄...Τ΄ είναι όμοια. Έτσι, έχουμε το επόμενο συμπέρασμα:

Δύο κανονικά πολύγωνα με τον ίδιο αριθμό πλευρών είναι όμοια.

11.2 Ιδιότητες και στοιχεία κανονικών πολυγώνων

Μια σημαντική ιδιότητα των κανονικών πολυγώνων εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

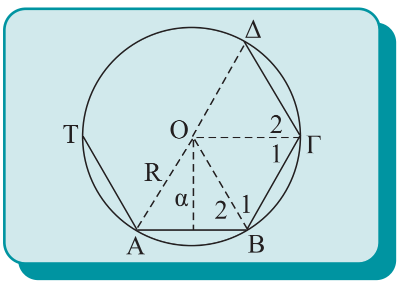
Κάθε κανονικό πολύγωνο εγγράφεται σε έναν κύκλο και περιγράφεται σε έναν άλλον. Οι δύο αυτοί κύκλοι είναι ομόκεντροι.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ...Τ ένα κανονικό πολύγωνο (σχ. 3). Θεωρούμε τον κύκλο (Ο, R) που διέρχεται από τις κορυφές Α, Β, Γ του πολυγώνου. Θα αποδείξουμε ότι ο κύκλος αυτός διέρχεται και από την κορυφή Δ, δηλαδή ότι ΟΔ=R. Επειδή ΟΒ=ΟΓ=R, το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1 = \sigma$, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ είναι ίσα, γιατί έχουν:

ΟΒ=ΟΓ, ΑΒ=ΓΔ (αφού ΑΒΓΔ... Τ κανονικό) και

$$\hat{B}_2 = \hat{B} - \sigma = \hat{\Gamma} - \sigma = \hat{\Gamma}_2.$$



Σχήμα 3

Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΟΔ = ΟΑ = R. Όμοια αποδεικνύεται ότι ο κύκλος (Ο,R) διέρχεται και από τις υπόλοιπες κορυφές Ε, Ζ, ... Τ και επομένως το πολύγωνο είναι εγγράψιμο. Οι πλευρές του πολυγώνου είναι ίσες χορδές του κύκλου (Ο,R), επομένως και τα αποστήματά τους θα είναι ίσα, έστω με α. Επομένως, ο κύκλος (Ο,α) εφάπτεται στις πλευρές του ΑΒΓΔ...Τ, άρα το πολύγωνο είναι περιγράψιμο σε κύκλο. Είναι φανερό, από τα παραπάνω, ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος (Ο,R) και ο εγγεγραμμένος (Ο,α) του πολυγώνου είναι ομόκεντροι.

• Στοιχεία κανονικού πολυγώνου

Αποδείξαμε παραπάνω ότι κάθε κανονικό πολύγωνο έχει έναν περιγεγραμμένο και έναν εγγεγραμμένο κύκλο που έχουν κοινό κέντρο.

Το κοινό κέντρο των δύο αυτών κύκλων λέγεται ***κέντρο*** του πολυγώνου. Η ακτίνα R του περιγεγραμμένου κύκλου λέγεται ***ακτίνα*** του πολυγώνου, ενώ η απόσταση του κέντρου από μια πλευρά του, δηλαδή η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου λέγεται ***απόστημα*** του πολυγώνου.

Επειδή τα τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{B\Gamma}$, … , $\overset{\frown}{TA}$ (σχ.3) είναι ίσα, οι επίκεντρες γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, …, $T\hat{O}A$ είναι ίσες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές, δηλαδή η γωνία υπό την οποία φαίνεται κάθε πλευρά του πολυγώνου από το κέντρο του, λέγεται ***κεντρική γωνία*** του πολυγώνου.

Στα επόμενα, σε ένα κανονικό ν-γωνο θα συμβολίζουμε με R την ακτίνα του, με λ_ν την πλευρά του, με α_ν το απόστημά του, με ω_ν την κεντρική του γωνία, με P_ν την περίμετρό του και E_ν το εμβαδόν του.

Για τα στοιχεία των κανονικών πολυγώνων ισχύει το εξής θεώρημα.

Θεώρημα Ι

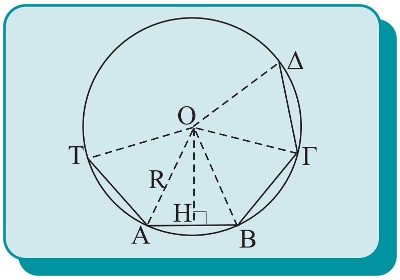
Σε κάθε κανονικό ν–γωνο ακτίνας R ισχύουν οι εξής σχέσεις:

(i) $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ **(ii)** $P_\nu = \nu\lambda_\nu$

(iii) $\omega_\nu = \dfrac{360°}{\nu}$ **(iv)** $E_\nu = \dfrac{1}{2}P_\nu\alpha_\nu$

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ...Τ ένα κανονικό ν-γωνο, R η ακτίνα του, $AB = \lambda_\nu$ η πλευρά του και $OH = \alpha_\nu$ το απόστημά του (σχ.4).



Σχήμα 4

(i) Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΗΟΑ, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος προκύπτει $OH^2+HA^2=OA^2$, δηλαδή

$$\alpha_\nu^2 + \left(\frac{\lambda_\nu}{2}\right)^2 = R^2.$$

(ii) Επειδή $AB = B\Gamma = \ldots = TA = \lambda_\nu$, θα είναι $P_\nu = \nu\lambda_\nu$.

(iii) Επειδή $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \ldots = \overset{\frown}{TA}$ θα είναι

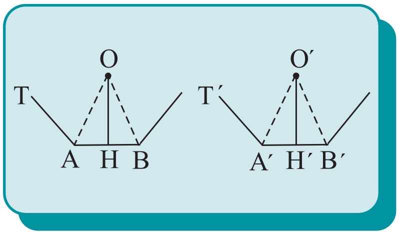
$$A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \ldots = T\hat{O}A = \omega_\nu$$

και αφού οι γωνίες $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, … και $T\hat{O}A$ έχουν άθροισμα 360^o· έχουμε $\nu\omega_\nu = 360°$, δηλαδή $\omega_\nu = \dfrac{360°}{\nu}$.

(iv) Τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΒΓ, ... , ΟΤΑ είναι ίσα (ΠΠΠ), άρα και ισεμβαδικά και επομένως έχουμε:

$$E_\nu = \nu(OAB) = \nu\,\frac{1}{2}\,AB\cdot OH = \frac{1}{2}\,\nu\lambda_\nu\alpha_\nu = \frac{1}{2}\,P_\nu\alpha_\nu$$

αφού $P_\nu = \nu\lambda_\nu$.



Σχήμα 5

Πορισμα

Σε δύο κανονικά ν–γωνα ο λόγος των πλευρών τους ισούται με το λόγο των ακτίνων τους και το λόγο των αποστημάτων τους.

Απόδειξη

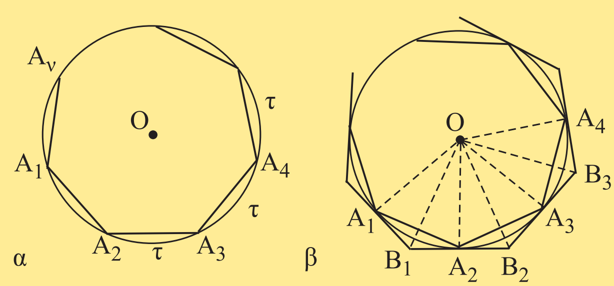
Θεωρούμε δύο κανονικά πολύγωνα ΑΒΓ...Τ και Α΄Β΄Γ΄...Τ΄ (σχ.5) με το ίδιο πλήθος πλευρών, έστω ν ($ν \geq 3$). Αν Ο,Ο΄ τα κέντρα των πολυγώνων, τα τρίγωνα ΟΑΒ και Ο΄Α΄Β΄ είναι όμοια γιατί είναι ισοσκελή και έχουν $A\hat{O}B = A'\hat{O}'B' = \dfrac{360°}{ν}$ και επομένως $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{OA}{O'A'} = \dfrac{OH}{O'H'}$, όπου ΟΗ, Ο′Η′ τα ύψη των τριγώνων. Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι:

$$\boxed{\frac{\lambda_ν}{\lambda'_ν} = \frac{R}{R'} = \frac{\alpha_ν}{\alpha'_ν}}\ ,$$

όπου $\lambda_ν$, R, $\alpha_ν$ τα συνήθη στοιχεία του ΑΒΓ...Τ και $\lambda'_ν$, R′, $\alpha'_ν$ τα στοιχεία του Α΄Β΄Γ΄...Τ΄.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αποδεικνύεται ότι, αν τα σημεία $A_1, A_2, ... A_ν$ διαιρούν έναν κύκλο σε ν ίσα τόξα, τότε το πολύγωνο $A_1A_2...A_ν$ (σχ.6α) καθώς και το πολύγωνο $B_1, B_2, ... B_ν$, που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία αυτά (σχ.6β) είναι κανονικά.



Σχήμα 6

ΣΧΟΛΙΟ

Η διαίρεση ενός κύκλου σε ν ίσα τόξα με τον κανόνα και το διαβήτη δεν είναι δυνατή για οποιαδήποτε τιμή του φυσικού αριθμού ν. Για παράδειγμα, δεν είναι δυνατή η διαίρεση ενός κύκλου σε επτά ίσα τόξα, το οποίο σημαίνει ότι δεν κατασκευάζεται κανονικό 7-γωνο. Από τον τρόπο κατασκευής των κανονικών πολυγώνων (με κανόνα και διαβήτη) που αναπτύσσεται στα στοιχεία του Ευκλείδη, προκύπτει ότι οι αρχαίοι Έλληνες Μαθηματικοί κατασκεύαζαν κανονικά πολύγωνα με πλήθος πλευρών $2^ν$, $ν \geq 2$, $2^ν \cdot 3$, $2^ν \cdot 5$, $2^ν \cdot 3 \cdot 5$, όπου ν = 0, 1, 2, ...
Ο Αρχιμήδης (287π.Χ. περίπου - 212π.Χ.) ασχολήθηκε με το πρόβλημα της κατασκευής κανονικού πολυγώνου και παρουσίασε ένα θαυμάσιο έργο με θέμα την κατασκευή του κανονικού 7-γώνου. Αρκετά αργότερα, το 1796, ο Gauss (1777 - 1855) με αφορμή την κατασκευή κανονικού 17-γώνου απέδειξε ότι ένα κανονικό πολύγωνο μπορεί να κατασκευαστεί, όταν το πλήθος ν των πλευρών του είναι της μορφής $ν = 2^α P_1 \cdot P_2 \cdot \ldots \cdot P_κ$, όπου α φυσικός αριθμός και $P_1, P_2, \ldots, P_κ$ πρώτοι αριθμοί του Fermat, δηλαδή της μορφής $P_λ = 2^{2^λ} + 1$, $λ = 1, 2, \ldots, κ$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Υπάρχουν κανονικά πολύγωνα των οποίων οι εξωτερικές γωνίες είναι αμβλείες;*

2. *Ποιο είναι το απόστημα κανονικού πολυγώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο;*

3. *Ένα κυρτό πολύγωνο είναι κανονικό όταν:*
α. έχει μόνον τις πλευρές του ίσες,
β. έχει μόνον τις γωνίες του ίσες,
γ. είναι εγγράψιμο σε κύκλο και έχει τις πλευρές του ίσες.

4. *Μεταξύ των λ_ν, α_ν και R ισχύει:*

α. $\lambda_\nu^2 + \dfrac{\alpha_\nu^2}{4} = R^2$ β. $\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = 4R^2$

γ. $\lambda_\nu^2 = 4(R^2 - \alpha_\nu^2)$ δ. $\lambda_\nu^2 + \alpha_\nu^2 = \dfrac{R^2}{4}$

5. *Μεταξύ των ω_ν και φ_ν ισχύει:*

α. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 1∟$ β. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 2∟$
γ. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 270°$ δ. $\omega_\nu + \varphi_\nu = 3∟$

(Στις ερωτήσεις 3, 4, και 5 κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να βρεθούν η γωνία και η κεντρική γωνία ενός κανονικού: πενταγώνου, εξαγώνου, δεκαγώνου και δωδεκαγώνου.*

2. *Αν η γωνία ενός κανονικού πολυγώνου είναι 108°, τότε το πλήθος των πλευρών του είναι:*
α. 15 β. 12 γ. 10
δ. 5 ε. 8
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Σε δύο κανονικά πεντάγωνα ο λόγος των πλευρών τους είναι λ = 2. Ποιος είναι ο λόγος των αποστημάτων, των ακτίνων τους, των περιμέτρων τους και των εμβαδών τους;*

4. *Τα πλήθη ν_1, ν_2 των πλευρών δύο κανονικών πολυγώνων είναι αντίστοιχα ρίζες των εξισώσεων:*
$\nu^3 - 3\nu^2 - 7\nu - 15 = 0$, $2\nu - 9 = \sqrt{\nu - 4}$.
Να αποδείξετε ότι τα πολύγωνα είναι όμοια.

5. *Να αποδείξετε ότι το μόνο κανονικό πολύγωνο με γωνία οξεία είναι το ισόπλευρο τρίγωνο.*

6. *Αν ένα κανονικό ν-γωνο και ένα κανονικό μ-γωνο (μ>ν) είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι*
i) $\lambda_\nu^2 - \lambda_\mu^2 = 4(\alpha_\mu^2 - \alpha_\nu^2)$,
ii) $\lambda_\nu > \lambda_\mu \Leftrightarrow \alpha_\nu < \alpha_\mu$.

7. *Θεωρούμε ένα κανονικό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R). Να αποδείξετε ότι*
i) κάθε διαγώνιος χωρίζει το πεντάγωνο σε ένα ισοσκελές τραπέζιο και σε ένα ισοσκελές τρίγωνο,
ii) η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ είναι κάθετη στην πλευρά ΑΕ,
iii) δύο διαγώνιοι που δεν έχουν κοινό άκρο σχηματίζουν με δύο πλευρές του πενταγώνου ρόμβο και
iv) αν Η είναι το σημείο τομής της ΑΓ με τη ΒΔ, τότε $AH^2 = A\Gamma \cdot H\Gamma$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Το δάπεδο ενός δωματίου στρώθηκε με πλακίδια σχήματος κανονικών πολυγώνων με πλήθος πλευρών λ, μ, ν, όπου λ ≠ μ ≠ ν ≠ λ. Να αποδείξετε ότι*

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu} = \frac{1}{2}.$$

2. *Αν ένα πολύγωνο είναι εγγράψιμο και περιγράψιμο σε δύο ομόκεντρους κύκλους, να αποδείξετε ότι είναι κανονικό.*

3. *Αν Α, Β, Γ, Δ είναι διαδοχικές κορυφές ενός κανονικού ν– γώνου (ν≥4), να αποδείξετε ότι*

$$A\Gamma^2 - AB^2 = AB \cdot A\Delta.$$

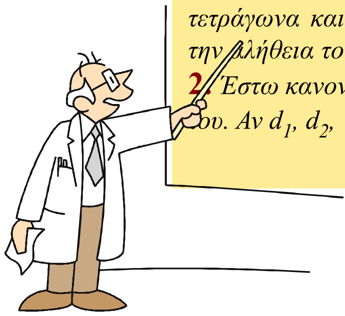
4. *Αν $E_{2\nu}$ είναι το εμβαδόν ενός κανονικού 2ν– γώνου (ν>4), εγγεγραμμένου σε κύκλο (O, R), να αποδείξετε ότι $E_{2\nu} = \frac{1}{2}P_\nu R$, όπου P_ν η περίμετρος του κανονικού ν–γώνου ακτίνας R.*

5. *Αν λ_ν' είναι πλευρά κανονικού ν – γώνου περιγεγραμμένου σε κύκλο και λ_ν, α_ν η πλευρά και το απόστημα αντίστοιχα, κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο, να αποδείξετε ότι $R \cdot \lambda_\nu = \alpha_\nu \cdot \lambda'_\nu$.*

6. *Αν E_α, E_β, E_γ είναι τα εμβαδά κανονικών ν-γώνων που έχουν πλευρές ίσες αντίστοιχα με τις πλευρές α, β, γ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A} = 1∟$), να αποδείξετε ότι $E_\beta + E_\gamma = E_\alpha$.*

Σύνθετα θέματα

1. *Οι Πυθαγόρειοι ισχυρίζονταν ότι υπάρχουν τρία μόνο κανονικά πολύγωνα των οποίων οι γωνίες μπορούν*



να καλύψουν το επίπεδο γύρω από ένα σημείο. Τα κανονικά αυτά πολύγωνα είναι τα ισόπλευρα τρίγωνα, τα τετράγωνα και τα κανονικά εξάγωνα. Να αποδείξετε την αλήθεια του ισχυρισμού αυτού των Πυθαγορείων.

2. *Έστω κανονικό ν-γωνο και σημείο Σ στο εσωτερικό του. Αν $d_1, d_2, \ldots, d_\nu$ είναι οι αποστάσεις του Σ από τις πλευρές του ν-γώνου, να αποδείξετε ότι*

$$d_1 + d_2 + \ldots + d_\nu = \nu\alpha_\nu,$$

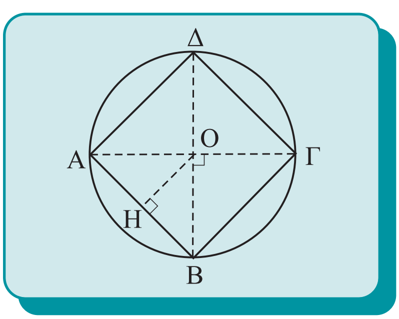
όπου α_ν το απόστημα του ν-γώνου.

3. *Σε κανονικό δεκάγωνο ΑΒΓΔ...Κ η πλευρά ΑΒ προεκτεινόμενη τέμνει την προέκταση της ακτίνας ΟΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι ΑΜ=ΑΔ.*

11.3 Εγγραφή βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και στοιχεία τους

Από την παρατήρηση της προηγούμενης παραγράφου προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ένα κανονικό πολύγωνο με ν ($\nu \geq 3$) πλευρές, αρκεί να χωρίσουμε ένα κύκλο σε ν ίσα τόξα. Η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη δεν είναι δυνατή για κάθε ν. (σχόλιο §11.2). Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με την εγγραφή μερικών βασικών κανονικών πολυγώνων σε κύκλο και θα υπολογίσουμε τα στοιχεία τους.

• Τετράγωνο



Σχήμα 7

Έστω ένας κύκλος (Ο,R) (σχ.7). Αν φέρουμε δύο κάθετες διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ, θα είναι $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}A = 90°$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$ και επομένως το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο. Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος έχουμε

$$\lambda_4^2 = AB^2 = OA^2 + OB^2 = R^2 + R^2 = 2R^2,$$

από την οποία προκύπτει ότι:

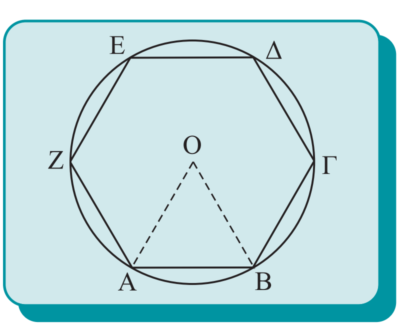
$$\boxed{\boldsymbol{\lambda_4 = R\sqrt{2}}}\,.$$

Από τη βασική σχέση $\alpha_\nu^2 + \dfrac{\lambda_\nu^2}{4} = R^2$ με ν = 4 προκύπτει ότι

$$\alpha_4^2 = R^2 - \frac{(R\sqrt{2})^2}{4} = \frac{R^2}{2},$$

δηλαδή $$\boxed{\boldsymbol{\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}}\,.$$

• Κανονικό εξάγωνο



Σχήμα 8

Έστω κύκλος (Ο,R) και ΑΒ η πλευρά του κανονικού εξαγώνου που θέλουμε να εγγράψουμε στον (Ο,R) (σχ.8).
Τότε $A\hat{O}B = \omega_6 = 60°$ και επειδή ΟΑ = ΟΒ (=R) το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο. Άρα ΑΒ = ΟΑ = R, δηλαδή