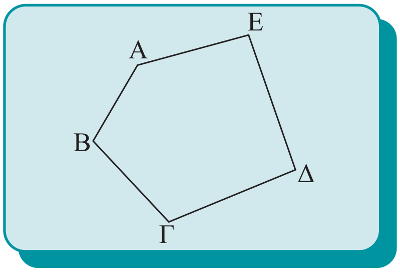
Πολυγωνικά χωρία – Πολυγωνικές επιφάνειες

10.1 Πολυγωνικά χωρία

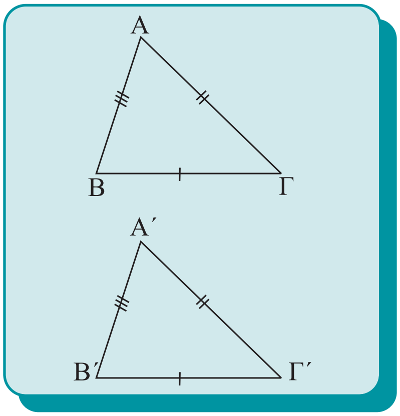
Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, για παράδειγμα ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 1). Το πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν ένα χωρίο, που λέγεται ***πολυγωνικό χωρίο*** που ορίζεται από το ΑΒΓΔΕ.
Ένα πολυγωνικό χωρίο που ορίζεται από τρίγωνο, τετράπλευρο, ... , ν-γωνο λέγεται αντίστοιχα ***τριγωνικό***, ***τετραπλευρικό***, ... , ***ν-γωνικό***.
Επίσης, δύο πολυγωνικά χωρία λέγονται **ίσα** όταν τα αντίστοιχα πολύγωνα είναι ίσα (σχ.2).

Τέλος ένα σχήμα που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων, που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγεται ***πολυγωνική επιφάνεια***.

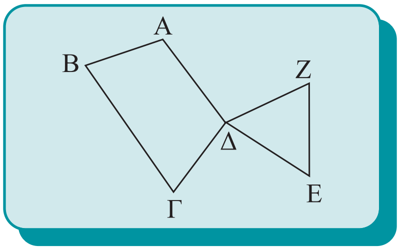
Για παράδειγμα, το σχήμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ.3) είναι μια πολυγωνική επιφάνεια..



Σχήμα 1



Σχήμα 2

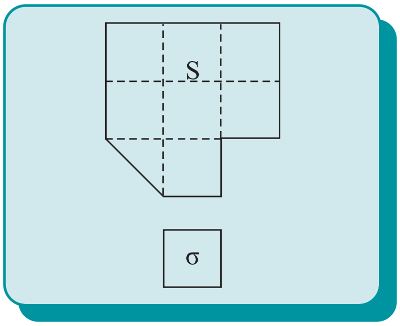


Σχήμα 3

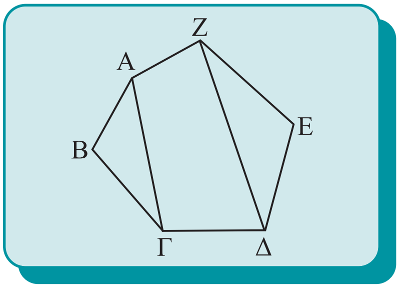
10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος - Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

Στο 7ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων. Εδώ θα ασχοληθούμε με τη μέτρηση πολυγωνικών χωρίων και επιφανειών.
Έστω, λοιπόν ένα πολυγωνικό χωρίο S (σχ.4). Όπως και στα ευθύγραμμα τμήματα, μέτρηση του χωρίου S λέμε τη σύγκρισή του με ένα άλλο επίπεδο χωρίο σ, το οποίο επιλέγουμε ως μονάδα. Η σύγκριση αυτή οδηγεί σε μια σχέση της μορφής: $S = \lambda \cdot \sigma$, όπου λ θετικός αριθμός. (Στην περίπτωση του σχ. 4 είναι $\lambda = 7{,}5$). Ο θετικός αριθμός λ λέγεται ***εμβαδόν*** του πολυγωνικού χωρίου S και συμβολίζεται με (S). Πολλές φορές το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας θα το συμβολίζουμε απλά με το γράμμα Ε. Επίσης, στα επόμενα, θα λέμε εμβαδόν τριγώνου, τετραπλεύρου και γενικά πολυγώνου και θα εννοούμε το εμβαδόν του αντίστοιχου πολυγωνικού χωρίου.
Για το εμβαδόν δεχόμαστε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες (αξιώματα):

- **Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.**



Σχήμα 4



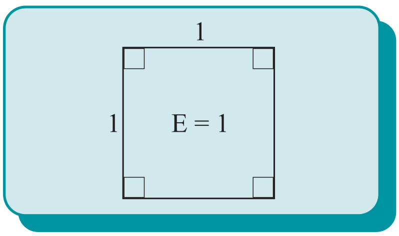
Σχήμα 5

• **Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων**. Για παράδειγμα, για το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΑΒΓΔΕΖ του (σχ. 5) έχουμε:

$$(ΑΒΓΔΕΖ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΖ) + (ΖΔΕ)$$

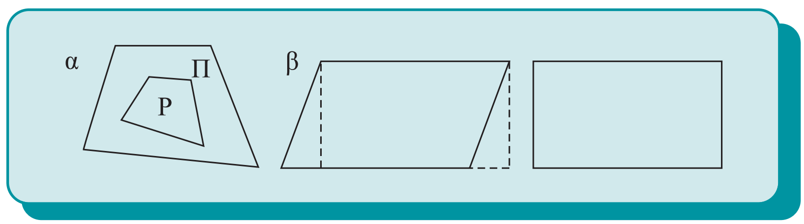
Επίσης δεχόμαστε ότι:

• **Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1.**



Από τα παραπάνω αξιώματα προκύπτει ότι:

• Αν ένα πολύγωνο P περιέχεται στο εσωτερικό ενός άλλου πολυγώνου Π (σχ.6α), τότε το εμβαδόν του P είναι μικρότερο του εμβαδού του Π.



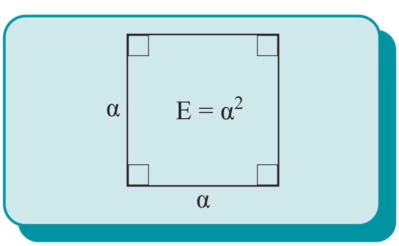
Σχήμα 6

Είδαμε παραπάνω ότι αν δύο πολυγωνικά χωρία είναι ίσα, τότε έχουν ίσα εμβαδά. Το αντίστροφο είναι φανερό (σχ. 6β) ότι δεν ισχύει.

Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται ***ισοδύναμα*** ή ***ισεμβαδικά***.

Έτσι σχήματα που δεν είναι ίσα μπορούν να συγκρίνονται ως προς το εμβαδόν τους.

Με τη βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων του εμβαδού μπορεί να αποδειχθεί το επόμενο θεώρημα.



Θεώρημα

Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι $α^2$, δηλαδή:

$$\mathbf{Ε = α^2.}$$

10.3 Εμβαδόν βασικών ευθυγράμμων σχημάτων

Με βάση το εμβαδόν του τετραγώνου θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

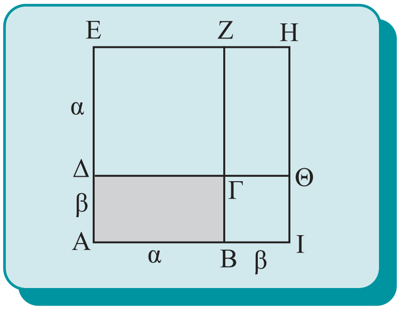
Δηλαδή αν α, β, οι πλευρές και Ε το εμβαδόν είναι:

$$\mathbf{E = \alpha \cdot \beta}$$

Απόδειξη

Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β (σχ.7). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=α, την ΑΒ κατά ΒΙ=β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ, το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α+β και επομένως είναι:

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\alpha + \beta)^2 \qquad (1).$$



Σχήμα 7

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε

$$(\text{ΔΓΖΕ})=\alpha^2,\ (\text{ΒΙΘΓ}) = \beta^2 \text{ και } (\text{ΓΘΗΖ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) \qquad (2)$$

Είναι φανερό όμως ότι

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\text{ΑΒΓΔ}) + (\text{ΓΘΗΖ}) + (\text{ΒΙΘΓ}) + (\text{ΔΓΖΕ}),$$

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(\alpha + \beta)^2 = 2(\text{ΑΒΓΔ}) + \alpha^2 + \beta^2.$$

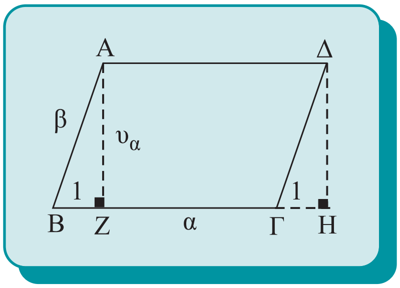
Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στη σχέση $(\text{ΑΒΓΔ}) = \alpha\cdot\beta$.

Θεώρημα ΙΙ

Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

Δηλαδή $\mathbf{E = \alpha\upsilon_\alpha = \beta\upsilon_\beta}$,

όπου α, β οι πλευρές και υ_α, υ_β τα αντίστοιχα ύψη.



Σχήμα 8

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ.8) και ας φέρουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΓΔ)=ΒΓ · ΑΖ.

Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90°$, ΑΒ = ΔΓ και

$\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$), οπότε: (ΖΒΑ) = (ΗΓΔ) (1).
Από το σχήμα όμως έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖ) + (ΑΖΓΔ), οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΓΔ) + (ΔΓΗ) = (ΑΖΗΔ).$$

Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Ι έχουμε

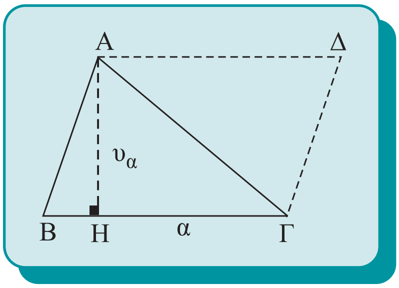
$$(ΑΒΓΔ)=(ΑΖΗΔ)=ΑΔ\cdot ΑΖ= ΒΓ\cdot ΑΖ,$$

που είναι το ζητούμενο.
Με τη βοήθεια του εμβαδού του παραλληλογράμμου θα υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου.

Θεώρημα ΙΙΙ

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

Δηλαδή $$\mathbf{E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma}.$$



Σχήμα 9

Απόδειξη
Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$(ΑΒΓΔ) = \alpha\cdot\upsilon_\alpha \qquad (1).$$

Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε:

$$(ΑΒΓ) = (ΑΔΓ) \qquad (2).$$

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ)+ (ΑΓΔ) η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$\alpha\cdot\upsilon_\alpha = 2(ΑΒΓ) \text{ ή } (ΑΒΓ) = \frac{1}{2}\alpha\cdot\upsilon_\alpha.$$

Τέλος, τον τύπο του εμβαδού τριγώνου θα τον αξιοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου.

Θεώρημα IV

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Δηλαδή $$\mathbf{E = \frac{(B+\beta)}{2}\cdot\upsilon},$$

όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.

Απόδειξη

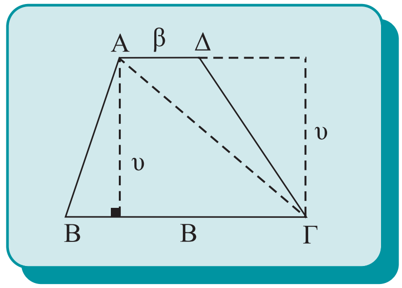
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

$$Ε = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) \qquad (1).$$

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(ΑΒΓ) = \frac{1}{2}Β \cdot υ \quad \text{και} \quad (ΑΒΔ) = \frac{1}{2}β \cdot υ \qquad (2).$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $Ε = \frac{Β + β}{2} \cdot υ$, δηλαδή το ζητούμενο.



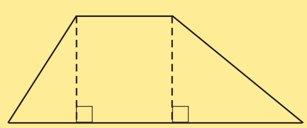
Σχήμα 10

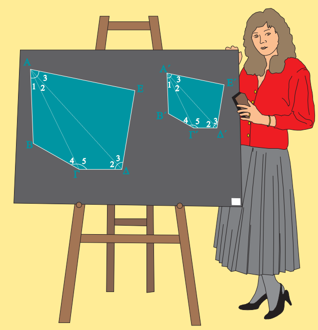
Πορισμα

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

Δραστηριότητα

Χωρίζοντας το τραπέζιο σε δύο ορθογώνια τρίγωνα και ένα ορθογώνιο (βλ. το παρακάτω σχήμα), να αποδείξετε τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου.





ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Το εμβαδόν Ε ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με

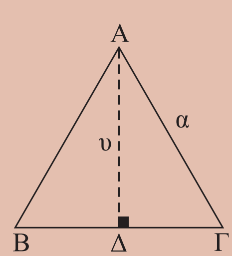
$$\mathbf{Ε = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}}.$$

Απόδειξη

Φέρουμε το ύψος ΑΔ (σχ. 11) το οποίο είναι και διάμεσος. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε

$$υ^2 = ΑΔ^2 = α^2 - ΔΓ^2 = α^2 - \left(\frac{α}{2}\right)^2 = \frac{3α^2}{4},$$

δηλαδή $υ = \frac{α\sqrt{3}}{2}$, οπότε $Ε = \frac{1}{2}αυ = \frac{1}{2}α\frac{α\sqrt{3}}{2} = \frac{α^2\sqrt{3}}{4}$.



Σχήμα 11

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.

Απόδειξη

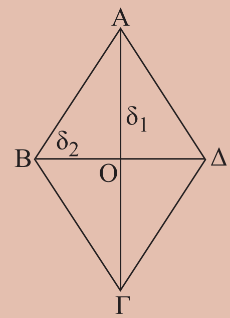
Είναι φανερό (σχ.12) ότι

$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) \quad (1).$$

Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούνται έχουμε:

$$(ΑΒΔ) = \frac{1}{2} ΒΔ \cdot ΑΟ = \frac{1}{2} δ_2 \cdot \frac{δ_1}{2} = \frac{1}{4} δ_1 \cdot δ_2 \text{ και } (ΒΓΔ) = \frac{1}{4} δ_1 \cdot δ_2 \quad (2).$$

Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει ότι $Ε = \frac{1}{2} δ_1 \cdot δ_2$ (3).



Σχήμα 12

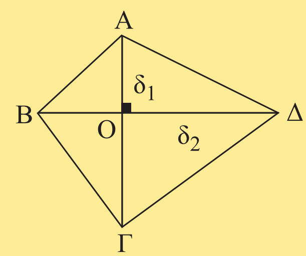
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο προηγούμενος τύπος (3) ισχύει και στην περίπτωση οποιουδήποτε κυρτού ή μη κυρτού, τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους.
Πράγματι (σχ. 13, 14)

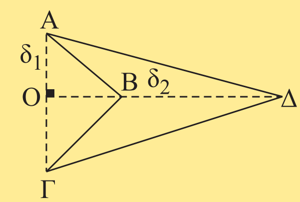
$$(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) =$$

$$= \frac{1}{2} ΒΔ \cdot ΑΟ + \frac{1}{2} ΒΔ \cdot ΟΓ = \frac{1}{2} ΒΔ\,(ΑΟ + ΟΓ) = \frac{1}{2} ΒΔ \cdot ΑΓ.$$

Μια γενίκευση του τύπου (3), για την περίπτωση του τετραπλεύρου αποτελεί η άσκηση 7 των αποδεικτικών ασκήσεων.



Σχήμα 13



Σχήμα 14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ.

i) Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου να αποδείξετε ότι

$$\mathbf{(ΑΒΜ) = (ΑΜΓ).}$$

ii) Από την κορυφή Α να φέρετε τρεις ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα.

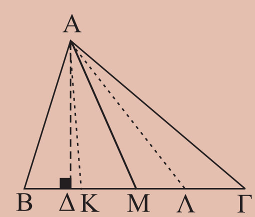
Λύση

i) Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 15). Το ΑΔ είναι και ύψος στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ, οπότε έχουμε

$$(ΑΒΜ) = \frac{1}{2} ΒΜ \cdot ΑΔ = \frac{1}{2} ΜΓ \cdot ΑΔ = (ΑΜΓ)$$

αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

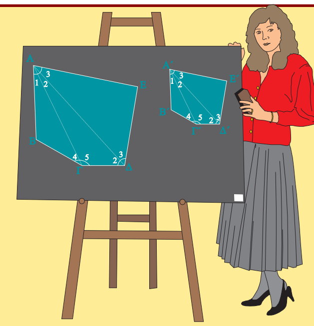
ii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι οι ζητούμενες ευθείες είναι οι φορείς των διαμέσων ΑΜ, ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ και ΑΜΓ αντίστοιχα.



Σχήμα 15

Δραστηριότητα

Να χωρίσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα με ευθείες από την κορυφή Α.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού:*
i) τετραγώνου
ii) ορθογωνίου
iii) παραλληλογράμμου
iv) τριγώνου
v) τραπεζίου

2. *Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 16. Πόσο είναι το εμβαδόν του;*

3. *Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις α=9, β=4 και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς x. Να βρεθεί το x.*

4. *Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α < β. Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα $υ_α$ και $υ_β$;*

5. *Αν ένας ρόμβος έχει μήκη διαγωνίων 4 και 5 αντίστοιχα, με τι ισούται το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος;*

6. *Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν αγρό, που είχε σχήμα τετραγώνου πλευράς 60 m, με έναν άλλο αγρό (με την ίδια ποιότητα χώματος) που είχε σχήμα ορθογωνίου με πλάτος 40 m και περίμετρο ίση με την περίμετρο του πρώτου. Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από την ανταλλαγή αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α = 4 κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΖ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν των ΑΒΓΔ, ΑΔΖ, ΑΒΖ και ΒΖΓ.*

2. *Αν Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΔ = 10 τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε το άθροισμα (ΑΜΒ) + (ΔΜΓ) είναι :*
Α:25 Β:40 Γ:50 Δ:75 Ε:100
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και $\hat{Α}$=60°. Να βρεθούν: i) το ύψος $υ_β$, ii) το εμβαδόν (ΑΒΓ), iii) το ύψος $υ_α$.*

4. *Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 14 και διαγώνιο 5. Να βρείτε το εμβαδόν του.*

5. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ = 10 και αντίστοιχο προς αυτήν ύψος υ = 5. Πάνω στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΖΓ.*
i) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.
ii) Αφού πρώτα συγκρίνετε τα εμβαδά των τραπεζίων ΑΕΖΒ και ΕΖΓΔ να βρείτε το εμβαδόν καθενός από αυτά.

6. *Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με $\hat{Α} = \hat{Β} = 1∟$, ΑΔ = 15m, ΒΓ = 20m και ΑΒ = 12m. Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μια λωρίδα πλάτους 3m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Αν Σ είναι σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι*

$$(ΣΑΓ) + (ΣΒΔ) = (ΑΒΓ).$$

2. *Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ να αποδείξετε ότι:*
i) (ΑΒΕ) = (ΒΕΓ), ii) (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ) και iii) (ΒΘΔ) = (ΑΘΕ).

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το βαρύκεντρό του Θ. Από σημείο Σ της διαμέσου ΑΔ φέρουμε τις κάθετες ΣΕ, ΣΖ στις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*
i) (ΑΒΣ) = (ΑΓΣ),
ii) ΑΒ·ΣΖ=ΑΓ·ΣΕ και
iii) $(ΑΒΘ) = (ΒΘΓ) = \frac{1}{3}(ΑΒΓ)$.

4. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ). Αν Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ, να αποδείξετε ότι*

$$(ΑΒΓΔ) = 2(ΜΓΔ).$$

5. *Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της μίας από τις μη παράλληλες* *πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.*

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1, ΑΓ = 2 και $\hat{A}$=120°. Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετράγωνα ΑΒΔΓ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:*
i) να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ,
ii) να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και
iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι $5 + \sqrt{3}$.

7. *Αν ω είναι η γωνία των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι*

$$(ΑΒΓΔ) = \frac{1}{2} ΑΓ \cdot ΒΔ \cdot ημω.$$

8. *Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος είναι κατά 18 m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5 m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονές του 695 m^2. Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.*

Σύνθετα θέματα

1. *Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των ημιευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ, Η, Θ και Ι, ώστε ΒΖ =ΑΒ, ΓΗ=ΒΓ, ΔΘ=ΓΔ και ΑΙ=ΑΔ. Να αποδείξετε ότι*
i) (ΙΘΑ) = (ΑΘΔ) = (ΑΓΔ),
ii) (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓΔ) και
iii) (ΙΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ).

2. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ. Να αποδείξετε ότι $(MNP) = \frac{1}{8}(ΑΒΓ)$.*

3. *Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $ΖΓ = ΗΔ = \frac{α}{4}$.*
i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ τέμνονται κάθετα σε σημείο Κ.
ii) Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων: ΑΚ, ΑΗ και ΚΗ.
iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΚΗΔ.

4. *Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι*
i) (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΑΒΓ) και
ii) (ΟΑΓ) + (ΟΒΓ) = (ΟΓΔ).

5. *Αν ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι ρόμβος πλευράς α και τετράγωνο πλευράς α αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) ≤ (ΚΛΜΝ).*

10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ, προκύπτουν και οι επόμενοι τύποι:

(i) $\mathbf{E = \sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}}$ (τύπος του Ήρωνα), όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

(ii) $\mathbf{E = τρ}$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(iii) $\mathbf{E = \frac{αβγ}{4R}}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη

(i) Στην § 9.4 (Εφαρμογή 2) αποδείξαμε ότι

$υ_α = \frac{2}{α}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)}$, οπότε έχουμε: