2.8 Κυρτότητα και σημεία καμπής συνάρτησης

Β΄ Ομάδας

Άσκηση 1 σελ. 160

Να βρείτε τα σημεία καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

$$f(x)=\frac{x}{x^2+1}$$

και να αποδείξετε ότι δύο από αυτά είναι συμμετρικά ως προς το τρίτο.

Λύση

Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=\frac{(x)'(x^2+1)-x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=\frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2},\ x\in\mathbb{R}$$

$$f''(x)=\frac{(1-x^2)'(x^2+1)^2-(1-x^2)\left((x^2+1)^2\right)'}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{\left(-2x(x^2+1)^2-4x(1-x^2)(x^2+1)\right)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{-2x(x^2+1)-4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3}=\frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}=\frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\curvearrowright$	ΣΚ $-\sqrt{3}/4$	$\circlearrowleft$	0 ΣΚ	$\curvearrowright$	ΣΚ $\sqrt{3}/4$	$\circlearrowleft$	

Η f'' μηδενίζεται στα $-\sqrt{3},0,\sqrt{3}$ και εκατέρωθεν αυτών αλλάζει πρόσημο, οπότε τα σημεία $A\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $B(0,0)$ *και* $\Gamma(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$ είναι σημεία καμπής της C_f.

Τα $A\left(-\sqrt{3},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $\Gamma(\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{4})$ έχουν αντίθετες συντεταγμένες επομένως είναι συμμετρικά ως προς το $O(0,0)$.

Άσκηση 2 σελ. 160

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης:

$$f(x) = 2e^{x-a} - x^2$$

έχει για κάθε τιμή του $a \in \mathbb{R}$, ακριβώς ένα σημείο καμπής που βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$.

Λύση

Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 2e^{x-a}(x-a)' - 2x = 2e^{x-a} - 2x$

$f''(x) = 2e^{x-a}(x-a)' - 2(x)' = 2(e^{x-a} - 1)$

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$f''(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\curvearrowright$	$2-a^2$ ΣΚ	$\circlearrowleft$	

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο a και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο, το σημείο $A(a, 2-a^2)$, $a \in \mathbb{R}$ είναι σημείο καμπής της C_f. Το σημείο αυτό βρίσκεται στην παραβολή $y = -x^2 + 2$, αφού για $x = a$ είναι $y = -a^2 + 2 = 2 - a^2$.

Άσκηση 3 σελ. 160

Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in (-2,2)$ η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2\alpha x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ είναι κυρτή σε όλο το $\mathbf{R}$.

Λύση

Η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$ αν $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 4x^3 - 6\alpha x^2 + 12x + 2\,,\ x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 12x^2 - 12\alpha x + 12 = 12(x^2 - \alpha x + 1),\ \ x \in \mathbb{R}$

$f''(x) > 0 \ \Leftrightarrow\ x^2 - \alpha x + 1 > 0\ \ \textit{για κάθε}\ x \in \mathbb{R}.$

Πρέπει : $\Delta < 0 \ \Leftrightarrow\ (-\alpha)^2 - 4 < 0 \ \Leftrightarrow\ \alpha^2 - 4 < 0 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 < 4 \ \Leftrightarrow\ |\alpha|^2 < 4 \ \Leftrightarrow\ |\alpha| < 2 \ \Leftrightarrow\ -2 < \alpha < 2 \ \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha \in (-2,2)$ που ισχύει. Επομένως, $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 4 σελ. 160

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

i) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

ii) Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής, να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι συνευθειακά.

Λύση

i) Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
$f'(x)$	+		−		−		+
$f''(x)$	−		−		+		+
$f(x)$	↗	max 2	↘	ΣΚ 0	↘	min -2	↗

Δηλαδή, η f παρουσιάζει:

- στο σημείο 0 τοπικό μέγιστο το $f(0) = 2$ και
- στο σημείο 2 τοπικό ελάχιστο το $f(2) = -2$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο 1 και εκατέρωθεν αυτού αλλάζει πρόσημο το σημείο $\Gamma(1,0)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

ii) Τοπικό μέγιστο : $A(0,2)$.

Τοπικό ελάχιστο : $B(2,-2)$

Σημείο καμπής : $\Gamma(1,0)$

Για να είναι τα A, B, Γ συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι : $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}$.

Είναι : $\lambda_{AB} = \frac{-2-2}{2-0} = -2$, $\lambda_{A\Gamma} = \frac{0-2}{1-0} = -2$

Πράγματι ισχύει ότι: $\lambda_{AB} = \lambda_{A\Gamma}$.

Άσκηση 5 σελ. 161

Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0.$$

Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Έστω ότι η f έχει σημείο καμπής το $A(x_o, f(x_o))$. Τότε πρέπει να είναι: $f''(x_o) = 0 \quad (1)$.

Από τη δοθείσα σχέση έχουμε :

$(f^2(x))' - 2f'(x) + (x^2 - 3)' = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2f(x)f'(x) - 2f'(x) + 2x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(x)f'(x) - f'(x) + x = 0$

Παραγωγίζουμε και πάλι για να βρούμε την $f''(x)$. Οπότε :

$$f'(x)f'(x) + f(x)f''(x) - f''(x) + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(f'(x))^2 + (f(x) - 1)f''(x) + 1 = 0$$

Για $x = x_o$ έχουμε :

$(f'(x_o))^2 + (f(x_o) - 1)f''(x_o) + 1 = 0$ οπότε από την (1) προκύπτει :

$(f'(x_o))^2 + 1 = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα, η f δεν έχει σημείο καμπής.