2.7 Τοπικά ακρότατα συνάρτησης

Α΄ Ομάδας

Άσκηση 2 σελ. 149

2. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$ ii) $g(x)=x^3-3x+2$

iii) $h(x)=2x^3-3x^2-1$.

β) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών των εξισώσεων:

$$x^3-3x^2+3x+1=0,\quad x^3-3x+2=0,\quad 2x^3-3x^2-1=0.$$

Λύση

α)

i) $f(x)= x^3-3x^2+3x+1$

Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$

$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=$

$=3(x-1)^2\geq 0, x\in\mathbb{R}$

$f'(x)=0 \iff 3(x-1)^2=0 \iff x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f(x)$	↗		↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x\in\mathbb{R}$.Δεν έχει ακρότατα .

ii) Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$.

$g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$

$g'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff x = \pm 1$

x	$-\infty$ $\quad$ -1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

Οπότε, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, -1]$ *και στο* $[1, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

Έχει τοπικό μέγιστο στο -1 το :

$$g(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$

Έχει τοπικό ελάχιστο στο 1 το:

$$g(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 0$$

iii) Πεδίο ορισμού της h είναι : $\mathbb{R}$.
$h'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

Οπότε, η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ *και στο* $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,1]$.

Έχει τοπικό μέγιστο στο 0 το : $h(0) = -1$.

Έχει τοπικό ελάχιστο στο 1 το: $h(1) = -2$.

β) i) f συνεχής ως πολυωνυμική.

Είναι : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$.

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα (από ερώτημα (α)), το σύνολο τιμών της f είναι το : $f(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

Το $0 \in f(A) = \mathbb{R}$ επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον:

$$x_o \in A: \quad f(x_o) = 0$$

Αφού η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο A το x_o είναι μοναδική ρίζα.

ii) Η $g(x) = x^3 - 3x + 2$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ και $g(-1) = 4$

Η g στο $(-\infty, -1]$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα :

$g\big((-\infty, -1]\big) = (-\infty, 4]$

Είναι : $0 \in (-\infty, 4]$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον:

$x_1 \in (-\infty, 1]$: $g(x_1) = 0$. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Η g στο $[-1,1]$ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα :

$g([-1,1]) = [0,4]$

Είναι : $0 \in [0,4]$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον:

$x_2 \in [-1,1]$: $g(x_2) = 0$. Επειδή η g είναι γνησίως φθίνουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Επειδή $g(1) = 0$ το 1 είναι αυτή η ρίζα.

$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ και $g(1) = 0$

Η g στο $[1,+\infty)$ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα :

$g([1,+\infty) = [0,+\infty)$

Είναι : $0 \in [0,+\infty)$ οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον:

$x_3 \in [1,+\infty)$: $g(x_3) = 0$. Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα η ρίζα αυτή είναι μοναδική. Επειδή $g(1) = 0$ το 1 είναι αυτή η ρίζα

Επομένως, η g έχει στο $\mathbb{R}$ δύο άνισες ρίζες.

iii) Η $h(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$.
$\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ και $h(0) = -1$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$ (από ερώτημα (α))

Επομένως, $h\big((-\infty,0]\big) = (-\infty,-1]$ στο οποίο δεν ανήκει το 0 έτσι η h δεν έχει ρίζα σε αυτό το διάστημα.

Όμοια : $g([0,1]) = [-3,-1]$ στο οποίο δεν ανήκει το 0 έτσι η h δεν έχει ρίζα σε αυτό το διάστημα.

$h\big([1,+\infty)\big) = [-3,+\infty)$ στο οποίο ανήκει το 0 και επειδή είναι και γνησίως αύξουσα έχει μοναδική ρίζα σε αυτό το διάστημα.

Άσκηση 5 σελ. 150

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x + 1$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$. Να καθορίσετε το είδος των ακροτάτων.

Λύση

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = 3ax^2 + 2\beta x - 3$$

Αφού είναι παραγωγίσιμη και παρουσιάζει ακρότατο στα -1 $\kappa\alpha\iota$ 1, από το θεώρημα Fermat προκύπτει :

$$f'(-1) = 0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f'(1) = 0$$

$$f'(-1) = 0 \iff 3a - 2\beta - 3 = 0 \iff 3\alpha - 2\beta = 3 \quad (\mathbf{1})$$

$$f'(1) = 0 \iff 3a + 2\beta - 3 = 0 \iff 3\alpha + 2\beta = 3 \quad (\mathbf{2})$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) $\kappa\alpha\iota$ (2) προκύπτει ότι :

$$\boldsymbol{\alpha = 1} \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \boldsymbol{\beta = 0}$$

Για τα α, β που βρήκαμε η συνάρτηση γίνεται : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 3 = 0 \iff x = \pm 1$$

x	$-\infty$ $\qquad$ -1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

Άρα, η f παρουσιάζει -1 τοπικό μέγιστο το 3 και στο 1 τοπικό ελάχιστο το1.

Άσκηση 10 σελ. 150

Το κόστος της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός βιομηχανικού προϊόντος είναι $K(x)=\frac{1}{3}x^3-20x^2+600x+1000$ ευρώ, για $0\le x\le 105$, ενώ η είσπραξη από την πώληση των x μονάδων είναι $E(x)=420x-2x^2$ ευρώ. Να βρεθεί η ημερήσια παραγωγή του εργοστασίου, για την οποία το κέρδος γίνεται μέγιστο.

Λύση

Κέρδος :

$$f(x)=E(x)-K(x)=-\frac{1}{3}x^3+18x^2-180x-1000,\ \ x\in[0,105]$$

$$f'(x)=-x^2+36x-180$$

$$f'(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=6 \ \text{ ή } \ x=30$$

x	0 6	30	105
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘

Άρα, η f παρουσιάζει μέγιστο κέρδος όταν έχει ημερήσια παραγωγή 30 μονάδες αφού εκεί παρουσιάζει μέγιστο.

Β′ Ομάδας

Άσκηση 2 β’ ομάδας σελ. 151

i) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x) = \ln x + x - 1$$

και να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημό της.

ii) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$\varphi(x) = 2x\ln x + x^2 - 4x + 3$$

iii) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x\ln x \text{ και } h(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Λύση

i) Η $f(x) = lnx + x - 1$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (0, +\infty)$.

$$f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0 \ \text{για κάθε } x > 0$$

Οπότε, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Είναι : $f(1) = ln1 + 1 - 1 = 0$ δηλαδή το 1 είναι μοναδική ρίζα.

$x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 0$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 0$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) $\varphi(x) = 2xlnx + x^2 - 4x + 3$

$\varphi'(x) = 2lnx + 2x \cdot \frac{1}{x} + 2x - 4$

$= 2lnx + 2 + 2x - 4$

$= 2lnx + 2x - 2 = 2(lnx + x - 1) = 2f(x)$

$\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$		$+$
$\varphi(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Έχει ελάχιστο το $\varphi(1) = 0$.

iii) Για να βρούμε το σημείο τομής των $g(x)$ $\kappa\alpha\iota$ $h(x)$ αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $g(x) = h(x)$.

$\mathrm{g(x) = h(x)} \Leftrightarrow xlnx = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2xlnx = -x^2 - 4x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(x) = 0$ που έχουν 1 ρίζα τη $x = 1$. Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν 1 κοινό σημείο το $A(1,0)$.

Επίσης :

$$g'(x) = lnx + 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad g'(1) = 1$$

$$h'(x) = -x + 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad h'(1) = 1$$

Δηλαδή $g'(1) = h'(1)$ $\kappa\alpha\iota$ $g(1) = h(1) = 0$.

Άρα, έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο A.

Άσκηση 3 β' ομάδας σελ. 151

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει

i) α) $e^x > 1 + x$ ii) α) $\sigma\upsilon\nu x > 1 - \frac{1}{2}x^2$

β) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ β) $\eta\mu x > x - \frac{1}{6}x^3$

iii) α) $(1+x)^\nu > 1 + \nu x$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 2$

β) $(1+x)^\nu > 1 + \nu x + \frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 3$.

Λύση

i) α) $e^x > 1 + x \iff e^x - x - 1 > 0$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$		$+$
$\varphi(x)$	↘		↗

Στο $[0, +\infty)$ η f είναι γνησίως αύξουσα :

$x > 0 \implies f(x) > f(0) = 0 \iff e^x - x - 1 > 0$

β) $e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2$

Έστω $g(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$g'(x) = e^x - x - 1 > 0$ για $x \in (0, +\infty)$ από το ερώτημα (α).

Οπότε : η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ άρα:

$x>0 \Longrightarrow g(x)>g(0)$ οπότε : $e^x>1+x+\frac{1}{2}x^2$.

ii) α) $f(x)=\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{2}x^2-1,\ \ x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=-\eta\mu x+x$

$x\neq 0\ :\ \ |\eta\mu x|<|x| \iff -|x|<\eta\mu x<|x|$. Οπότε : για $x>0$:

$$\eta\mu x<x \iff -\eta\mu x+x>0$$

Άρα, $f'(x)>0 \implies f$ *γνησίως αύξουσα στο* $[0,+\infty)$.

Οπότε, για $x>0 \implies f(x)>f(0)=0$.

β) $g(x)=\eta\mu x+\frac{1}{6}x^3-x,\ \ x\in\mathbb{R}$.

$g'(x)=\sigma\upsilon\nu x+\frac{x^2}{2}-1=f(x)>0\ ,\ x>0$

$H\ \ g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Οπότε :

$x>0 \implies g(x)>g(0) \implies e^x-\frac{1}{2}x^2-x-1>0$

iv) α) $f(x)=(1+x)^{\nu}-\nu x-1,\ \ x\geq 0$

$f'(x)=\nu(1+x)^{\nu-1}-\nu=\nu[(1+x)^{\nu-1}-1]>0$

Αφού : $1+x>1 \implies (1+x)^{\nu-1}>1$.

Άρα, f γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ αφού f συνεχής στο 0.

$x>0 \implies f(x)>f(0)$

Οπότε : $(1+x)^{\nu}-1-\nu x>0$

Αφού $f(0)=(1+0)^{\nu}-1-\nu\cdot 0=0$

β) $g(x)=(1+x)^{\nu}-1-\nu x-\frac{\nu(\nu-1)}{2}x^2,\ \ x\geq 0$.

$g'(x)=\nu(1+x)^{\nu-1}-\nu-\nu(\nu-1)x$

$=\nu[(1+x)^{\nu-1}-1-\nu(\nu-1)]>0$ από (α).

Οπότε : g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

$x>0 \;\Longrightarrow\; g(x)>g(0) \;\Longrightarrow$

$\Longrightarrow\; (1+x)^{v}-1-vx-\frac{v(v-1)}{2}x^{2}>0$

Άσκηση 4 β' ομάδας σελ. 151

Να αποδείξετε ότι, αν για μια συνάρτηση f, που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, ισχύει

$$2f^3(x)+6f(x)=2x^3+6x+1,$$

τότε η f δεν έχει ακρότατα.

Λύση

Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη αν είχε ακρότατα θα ήταν ρίζες της εξίσωσης $f'(x)=0$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, παραγωγίζουμε τη σχέση που μας δίνεται και έχουμε:

$$2\big(f^3(x)\big)'+6\big(f(x)\big)'=2(x^3)'+6(x)'+(1)' \iff$$

$$2\cdot 3f^2(x)f'(x)+6f'(x)=2\cdot 3x^2+6\cdot 1+0 \iff$$

$$6f^2(x)f'(x)+6f'(x)=6x^2+6 \iff$$

$$6f'(x)[f^2(x)+1]=6(x^2+1) \iff$$

$$f'(x)[f^2(x)+1]=x^2+1 \quad (1)$$

Είναι : $f^2(x)+1\neq 0$ οπότε από την (1) $\Longrightarrow$ $f'(x)=\frac{x^2+1}{f^2(x)+1}$.

Επομένως, $f'(x)=0 \iff \frac{x^2+1}{f^2(x)+1}=0 \iff x^2+1=0$ που είναι αδύνατη αφού $x^2+1>0$ *για κάθε* $x\in\mathbb{R}$.

Αν είχε ακρότατο στο x_o θα ήταν $f'(x_o)=0$. Αν στην (1) βάλουμε όπου x το x_o παίρνουμε : $x_o^2+1=0$. ΑΤΟΠΟ

Άσκηση 6 β' ομάδας σελ. 152

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x) = (x-\alpha)^2(x-\beta)^2(x-\gamma)^2, \text{ με } \alpha < \beta < \gamma$$

έχει τρία τοπικά ελάχιστα και δύο τοπικά μέγιστα.

Λύση

Παρατηρούμε ότι $f(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$: $f(\alpha) = f(\beta) = f(\gamma) = 0$.

Άρα στα α, β, γ έχει ολικό ελάχιστο.

Συμπεραίνουμε ότι : $f'(\alpha) = f'(\beta) = f'(\gamma) = 0$.

Στο $[\alpha, \beta]$ έχουμε $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $x \in (\alpha, \beta)$ με $f(x) > 0$.

Στο $[\alpha, \beta]$ σαν συνεχής παίρνει μέγιστη τιμή έστω στο x_1.

Στο x_1 έχουμε τοπικό μέγιστο .

Επίσης, επειδή $x_1 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_1) = 0$.

Όμοια, για το $[\beta, \gamma]$ υπάρχει $x_2 \in (\beta, \gamma)$ στο οποίο η f έχει τοπικό μέγιστο και $f'(x_2) = 0$.

Στα α, β, γ έχουμε ολικό ελάχιστο άρα και τοπικό .

Στα $x_1,\ x_2$ έχουμε τοπικό μέγιστο .

Το $f(x)$ είναι πολυώνυμο $6^{ου}$ βαθμού. Άρα, $f'(x)$ είναι πολυώνυμο $5^{ου}$ βαθμού.

Αφού $\alpha, \beta, \gamma, x_1, x_2$ ρίζες και $f'(x) = 0$ αυτές είναι όλες οι ρίζες της f'. Άρα, η f δεν έχει αλλού τοπικό ακρότατο.

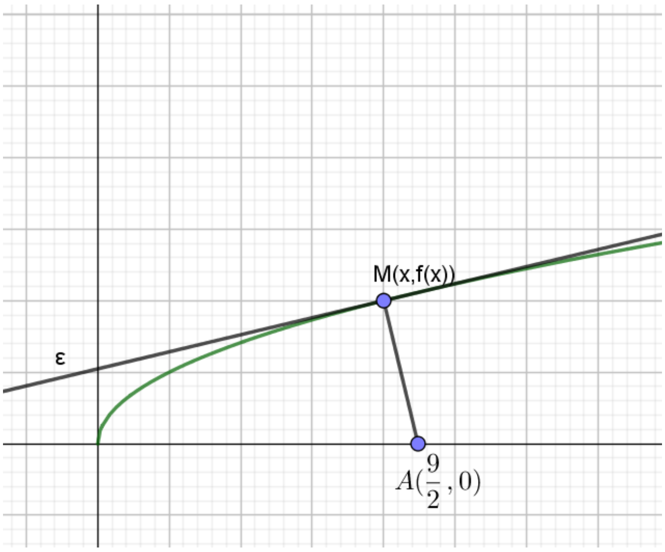
Άσκηση 8 β' ομάδας σελ. 152

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A\left(\frac{9}{2},0\right)$.

i) Να βρείτε το σημείο M της C_f που απέχει από το σημείο A τη μικρότερη απόσταση.

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο M είναι κάθετη στην AM.

Λύση



i) Βρίσκουμε την απόσταση του Μ από το Α.

$$(MA)=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-x\right)^2+\left(0-f(x)\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$(MA)^2=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+f^2(x)$$

Για να είναι ελάχιστο το MA αρκεί να είναι το MA^2 ελάχιστο.

Άρα, θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+f^2(x),\ \ x\in[0,+\infty)$$

και τη μελετάμε ως προς τα ακρότατα.

$$g'(x)=2\left(x-\tfrac{9}{2}\right)\left(x-\tfrac{9}{2}\right)'+2f(x)f'(x)=2\left(x-\tfrac{9}{2}\right)+2f(x)f'(x)$$

$= 2\left(x-\frac{9}{2}\right)+2\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2\left(x-\frac{9}{2}\right)+1 = 2x-8$

x	0	4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα, έχει ελάχιστο για $x = 4$ το $g(4) = \frac{17}{4}$.

Επομένως, η $(MA)^2$ και συνεπώς και η (MA) γίνεται ελάχιστη για $x = 4$.

Συνεπώς, το ζητούμενο σημείο είναι το $M(4,2)$.

ii) Η εφαπτομένη στο M είναι : (ε): $y - f(4) = f'(4)(x-4)$.

$$f(4) = 2,\ \ f'(4) = \frac{1}{4}$$

Άρα : $y - 4 = \frac{1}{4}(x-4) \iff y = \frac{1}{4}x + 3$.

$\lambda_\varepsilon = \frac{1}{4}$

$\lambda_{AM} = \frac{2-0}{4-\frac{9}{2}} = -4$

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AM} = -1$$

Οπότε : $\varepsilon \perp AM$.