2.3 Κανόνες παραγώγισης

Α΄ Ομάδας

Άσκηση 5 σελ. 120 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της f, στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα των x, όταν

i) $f(x)=x+\frac{4}{x}$ ii) $f(x)=\frac{x}{e^x}$ iii) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

Λύση

i) Μας ενδιαφέρουν τα σημεία $(x, f(x))$ της f για τα οποία ισχύει ότι:

$$f'(x)=0$$

Για $x\neq 0$ έχουμε: $f'(x)=(x)'+\left(\frac{4}{x}\right)'=1-\frac{4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x}$.

Οπότε: $f'(x)=0 \iff x^2-4=0 \iff x^2=4 \iff \boldsymbol{x=\pm 2}$

Για $x=2$ έχουμε: $f(2)=2+\frac{4}{2}=4$.

Για $x=-2$ έχουμε: $f(-2)=-2+\frac{4}{-2}=-4$.

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι: $A(-2,-4)$ $και$ $B(2,4)$.

ii) Μας ενδιαφέρουν τα σημεία $(x, f(x))$ της f για τα οποία ισχύει ότι:

$$f'(x)=0$$

Έχουμε: $f'(x)=\left(\frac{x}{e^x}\right)'=\frac{(x)'e^x-x(e^x)'}{(e^x)^2}=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}$.

Οπότε: $f'(x)=0 \iff 1-x=0 \iff \boldsymbol{x=1}$.

Για $x=1$ είναι: $f(1)=\frac{1}{e}$. Επομένως, το ζητούμενο σημείο είναι: $A\left(1,\frac{1}{e}\right)$.

iii) Μας ενδιαφέρουν τα σημεία $(x, f(x))$ της f για τα οποία ισχύει ότι: $f'(x)=0$

Για $x \neq 0$ έχουμε: $f'(x) = \frac{(x^2+1)'x-(x^2+1)(x)'}{x^2} = \frac{2x^2-x^2-1}{x^2} = \frac{(x^2-1)}{x^2}$

Οπότε: $f'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = 1 \iff \boldsymbol{x = \pm 1}$

Για $x = 1$ έχουμε: $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$.

Για $x = -1$ έχουμε: $f(-1) = \frac{1+1}{-1} = -2$.

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι: $A(1,2)$ $και$ $B(-1,-2)$.

Άσκηση 7 σελ. 121 σχολικού βιβλίου

Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων $f(x)=x^2$ και $g(x)=\frac{1}{2x}+\frac{1}{2}$ στο κοινό σημείο τους $A(1,1)$, είναι κάθετες.

Λύση

Για να είναι κάθετες δύο ευθείες αρκεί οι συντελεστές τους διεύθυνσης να έχουν γινόμενο -1.

Αρχικά βρίσκουμε τις παραγώγους των $f,\ g$.

Είναι : $f'(x)=2x \quad και \quad g'(x)=-\frac{1}{4x^2}(2x)'=-\frac{2}{4x^2}=-\frac{1}{2x^2}$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της f στο A είναι ο $f'(1)=2$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της g στο A είναι ο

$$g'(1)=-\frac{1}{2}$$

Βρίσκουμε το γινόμενό τους : $f'(1)\cdot g'(1)=2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$. .

Επομένως, οι εφαπτόμενες των γραφικών τους παραστάσεων είναι στο κάθετες στο κοινό τους σημείο (1,1).

Άσκηση 8 σελ. 121 σχολικού βιβλίου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x+\alpha}{x+\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η κλίση της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ είναι ίση με $\dfrac{1}{2}$.

Λύση

Είναι $f(0)=1$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

Η κλίση της C_f στο 0 είναι $f'(0)$.

Βρίσκουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{a\}$ την παράγωγο :

$$f'(x)=\frac{a(x+a)-(ax+a)}{(x+a)^2}=\frac{a^2-a}{(x+a)^2}$$

Οπότε: $f'(0)=\frac{a^2-a}{a^2}=\frac{a-1}{a}$.

Επομένως λύνουμε την εξίσωση $f'(0)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{a-1}{a}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(a-1)=a \Leftrightarrow 2a-2=a \Leftrightarrow \boldsymbol{a=2}$

Άσκηση 9 σελ. 121 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3-3x+5$, στα οποία η εφαπτομένη είναι:

i) παράλληλη προς την ευθεία $y=9x+1$

ii) κάθετη προς την ευθεία $y=-x$.

Λύση

- Για να είναι η εφαπτομένη παράλληλη στην πρέπει να έχουν την ίδια κλίση, δηλαδή να είναι: $f'(x)=9$.

  Λύνουμε την εξίσωση και θα βρούμε τις τετμημένες των ζητούμενων σημείων.

  Αρχικά βρίσκουμε την $f'(x)$.

$$f'(x)=(x^3)'-(3x)'+(5)'=3x^2-3$$

  Επομένως, $f'(x)=0 \iff 3x^2-3=9 \iff 3x^2=12 \iff x^2=4 \iff \boldsymbol{x=\pm 2}$

  Θα βρούμε και τις τεταγμένες αντικαθιστώντας στην τις τιμές που βρήκαμε.

  Για $x=2$ είναι : $f(2)=2^3-3\cdot 2+5=7$

  Για $x=-2$ είναι : $f(-2)=(-2)^3-3\cdot(-2)+5=-8+6+5=3$.

  Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι : $A(2,7)$, $B(-2,3)$.

- Για να είναι η εφαπτομένη κάθετη στην πρέπει οι κλίσεις τους να έχουν γινόμενο -1 , δηλαδή να είναι:

$$f'(x)\cdot(-1)=-1 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x)=1$$

Λύνουμε την εξίσωση και θα βρούμε τις τετμημένες των ζητούμενων σημείων.

Αρχικά βρίσκουμε την παράγωγο $f'(x)$.

$$f'(x)=3x^2-3$$

Επομένως, $f'(x)=1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2-3=1 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2=4 \quad \Leftrightarrow$

$x^2=\frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

Θα βρούμε και τις τεταγμένες αντικαθιστώντας στην τις τιμές που βρήκαμε.

Για $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ είναι : $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{-10\sqrt{3}+45}{9}$.

Για $x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ είναι : $f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{10\sqrt{3}+45}{9}$.

Επομένως, τα ζητούμενα σημεία είναι :

$$A\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{-10\sqrt{3}+45}{9}\right),\ B\left(\frac{-2\sqrt{3}}{3},\frac{10\sqrt{3}+45}{9}\right)$$

Άσκηση 10 σελ. 121 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ η οποία άγεται από το σημείο $A(0,-1)$.

Λύση

Δεν γνωρίζουμε το σημείο επαφής της εφαπτομένης της με αυτήν.

Έστω λοιπόν το σημείο.

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $M_o\big(x_o, f(x_o)\big)$ είναι :

$$\boldsymbol{y - f(x_o) = f'(x_o)(x - x_o)}$$

$$y - x_o^2 = 2x_o(x - x_o) \iff y = 2x_o x - 2x_o^2 + x_o^2 \iff$$
$$\iff y = 2x_o x - x_o^2$$

Για να περνάει η ε από το σημείο $A(0, -1)$, αρκεί οι συντεταγμένες του να την επαληθεύουν.

Δηλαδή: $-1 = 2x_o \cdot 0 - x_o^2 \iff x_o^2 = 1 \iff x_o = \pm 1$.

Για $x_o = 1$ έχουμε: $y = 2x - 1$.

Για $x_o = -1$ έχουμε: $y = -2x - 1$.

Άσκηση 11 σελ. 121 σχολικού βιβλίου

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η C_f, διέρχεται από το σημείο $A(1,2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y = x$ στην αρχή των αξόνων.

Λύση

Αφού η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα $A(1,2)$ και $O(0,0)$ οι συντεταγμένες τους την επαληθεύουν. Λύνουμε το σύστημα:

$f(1) = 2 \;\; \kappa\alpha\iota \;\; f(0) = 0$

Άρα, $f(0) = 0 \;\; \Leftrightarrow \;\; \boldsymbol{\gamma = 0}$.

Επίσης, $f(1) = 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \alpha + \beta + \gamma = 2 \;\; \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\; \alpha + \beta + 0 = 2 \;\; \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \;\; \alpha + \beta = 2 \quad (\mathbf{1})$

Βρίσκουμε την παράγωγο της f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι: $f'(x) = 2\alpha x + \beta$.

Επειδή η y εφάπτεται της C_f στο σημείο $O(0,0)$ έπεται ότι:

$f'(0) = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \boldsymbol{\beta = 1}$

$(1) \Leftrightarrow \;\; \alpha + 1 = 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; \boldsymbol{\alpha = 1}$

Άσκηση 12 σελ. 121 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=(3x^4+4x^3)^{-2}$ ii) $f(x)=(x-1)^{2/3}$

iii) $f(x)=\eta\mu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$ iv) $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}-x\right)$

v) $f(x)=e^{-x^2}$.

Λύση

Θυμίζουμε ότι είναι : $\left(f(g(x)\right)'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

i) $f'(x)=-2(3x^4+4x^3)^{-2-1}(3x^4+4x^3)'=$

$=-2(3x^4+4x^3)^{-3}(12x^3+12x^2)=$

$=-2\cdot 12x^2\cdot(3x^4+4x^3)^{-3}\cdot(x+1)=$

$=-24x^2\cdot(3x^4+4x^3)^{-3}\cdot(x+1)=$

$$=-24x^2\cdot\frac{1}{(3x^4+4x^3)^3}\cdot(x+1)=$$

$$=-\frac{24x^2}{x^9(3x+4)^3}\cdot(x+1)=\ -\frac{24(x+1)}{x^7(3x+4)^3}$$

ii) $f'(x)=\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}-1}(x-1)'=\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)}}\quad \gamma\iota\alpha\ \ x>1.$

iii) $f'(x)=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'=\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\left(-\frac{1}{(1+x^2)^2}\right)(1+x^2)'=$

$$=-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

iv) $f'(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}-x}\left(\frac{1}{x}-x\right)'=\frac{x}{1-x^2}\left(-\frac{1}{x^2}-1\right)=-\frac{x(1+x^2)}{(1-x^2)x^2}=-\frac{1+x^2}{x(1-x^2)}$

v) $f'(x)=e^{-x^2}(-x^2)'=-2xe^{-x^2}$

Άσκηση 14 σελ. 121 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=x^{\ln x}$ ii) $f(x)=2^{5x-3}$

iii) $f(x)=(\ln x)^x,\ x>1$ iv) $f(x)=ημx\cdot e^{συνx}$

Λύση

i) Γράφουμε την f ως εξής:

$$f(x)=x^{lnx}=e^{lnx^{lnx}}=e^{lnxlnx}=e^{\ln^2 x}$$

$$f'(x)=(x^{lnx})'=\left(e^{\ln^2 x}\right)'=e^{\ln^2 x}(\ln^2 x)'=$$

$$=x^{lnx}2lnx(lnx)'=\frac{2x^{lnx}lnx}{x}=2x^{lnx-1}lnx\,,\ x>0$$

ii) $f(x)=2^{5x-3}=e^{ln2^{5x-3}}=e^{(5x-3)ln2}$

$$f'(x)=\left(e^{(5x-3)ln2}\right)'=e^{(5x-3)ln2}\left((5x-3)ln2\right)'=$$

$$=2^{5x-3}\cdot 5ln2$$

iii) $f(x)=(lnx)^x=e^{\ln(lnx)^x}=e^{xln(lnx)}$

$$f'(x)=e^{xln(lnx)}\left(xln(lnx)\right)'=(lnx)^x(\ln(lnx)+x\cdot\frac{1}{lnx}\cdot(lnx)'=$$

$$=(lnx)^x\left(\ln(lnx)+\frac{1}{lnx}\right),\ \ x>1$$

iv) $f'^{(x)}=(ημx\cdot e^{συνx})'=(ημx)'\cdot e^{συνx}+ημx\cdot(e^{συνx})"=$

$$=συνx\cdot e^{συνx}+ημx\cdot e^{συνx}(συνx)'=$$

$$=συνx\cdot e^{συνx}-ημ^2x\cdot e^{συνx}=e^{συνx}(συνx-ημ^2x)$$

Άσκηση 15 σελ. 122 σχολικού βιβλίου

Αν $f(x)=ημ^2x$, να αποδείξετε ότι $f''(x)+4\ f(x)=2$.

Λύση

Είναι:

$f'(x) = 2ημxσυνx$

$f''(x) = 2συνxσυνx - 2ημxημx$

Επομένως:

$$f''(x) + 4f(x) = 2(συνx)^2 - 2(ημx)^2 + 4(ημx)^2 =$$
$$= 2συν^2x + 2ημ^2x = 2(συν^2x + ημ^2x) = 2 \cdot 1 = 2$$

Β΄ Ομάδας

Άσκηση 1 σελ. 122 σχολικού βιβλίου

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\frac{1}{x}$ και $g(x)=x^2-x+1$ έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο οι εφαπτομένες τους είναι κάθετες.

Λύση

Για να βρούμε το κοινό σημείο τους αρκεί να λύσουμε την εξίσωση $f(x)=g(x)$ και να δείξουμε ότι έχει μοναδική λύση.

$$f(x)=g(x) \iff \frac{1}{x}=x^2-x+1 \iff x^3-x^2+x-1=0 \iff$$

$$\iff x^2(x-1)+(x-1)=0 \iff (x-1)(x^2+1)=0 \iff$$

$$\iff x-1=0 \text{ ή } x^2+1=0 \iff x=1 \text{ ή } x^2=-1 \; \textit{αδύνατη} \iff$$

$$\iff \boldsymbol{x=1}$$

Για να βρούμε την τεταγμένη του κοινού σημείου αρκεί να αντικαταστήσουμε το x που βρήκαμε είτε στην $f(x)$ είτε στην $g(x)$.

$$f(1)=\frac{1}{1}=1$$

Επομένως, το κοινό σημείο τους είναι το $(1,1)$.

Για να είναι οι εφαπτομένες τους κάθετες αρκεί οι κλίσεις τους να έχουν γινόμενο -1.

Αρχικά βρίσκουμε τις παραγώγους των f,g.

Είναι : $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ *και* $g'(x)=2x-1$.

Η κλίση τους λοιπόν στο $x_o=1$ είναι:

$f'(1) = -1 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ g'(1) = 2 - 1 = 1$

Παρατηρούμε ότι : $f'(1) \cdot g'(1) = -1$.

Επομένως, οι εφαπτομένες τους στο $(1,1)$ είναι κάθετες.

Άσκηση 2 σελ. 122 σχολικού βιβλίου

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 2$ έχει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3$ δύο κοινά σημεία και εφάπτεται αυτής σε ένα από τα σημεία αυτά.

Λύση

Για να βρούμε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων εξισώνουμε τους τύπους των συναρτήσεων και επιλύουμε την εξίσωση που προκύπτει.

Έτσι έχουμε:

$$f(x) = y \iff x^3 = 3x - 2 \iff x^3 - 3x + 2 = 0 \iff$$

$$\iff x^3 - x - 2x + 2 = 0 \iff x(x^2 - 1) - 2(x - 1) = 0 \iff$$

$$\iff x(x-1)(x+1) - 2(x-1) = 0 \iff (x-1)(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\iff$$

$\boldsymbol{x = 1}$ ή $\boldsymbol{x = -2}$

Οπότε οι τετμημένες των κοινών σημείων είναι: $\boldsymbol{x = 1}$ ή $\boldsymbol{x = -2}$

Οι τεταγμένες τους είναι :

Για $x = 1$ έχουμε: $f(1) = 1$ οπότε το ένα σημείο είναι το: $A(1,1)$

Για $x = -2$ έχουμε: $f(-2) = -8$ οπότε το ένα σημείο είναι το: $B(-2,-8)$

Βρίσκουμε την παράγωγο της f $για$ $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 3x^2$.

Για $x = 1$ είναι: $f'(1) = 3$ ίση με την κλίση της $y = 3x - 2$.

Επομένως, η $y = 3x - 2$ είναι εφαπτομένη της C_f στο $\big(1, f(1)\big)$.

Για $x=-2$ είναι: $f'(-2)=12$ διαφορετική από την κλίση της $y=3x-2$.

Επομένως, η $y=3x-2$ δεν είναι εφαπτομένη της C_f στο $\left(-2, f(-2)\right)$.

Άσκηση 3 σελ. 122 σχολικού βιβλίου

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha x^2+\beta x+2$ και $g(x)=\frac{1}{x}$. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία οι γραφικές παραστάσεις τους έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη $x_0=1$.

Λύση

Στο $x_o=1$ πρέπει οι C_f, C_g να τέμνονται. Δηλαδή: $f(1)=g(1)$.

Άρα, $\alpha+\beta+2=1$ ή $\alpha+\beta=-1$ **(1)**

Βρίσκουμε την παράγωγο των f,g.

Είναι: $f'(x)=2\alpha x+\beta$ $\kappa\alpha\iota$ $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$.

Επομένως, $f'(1)=2\alpha+\beta$ και $g'(1)=-1$.

Για να έχουν κοινή εφαπτομένη πρέπει: $f'(1)=g'(1)$.

Δηλαδή: $2\alpha+\beta=-1$ **(2)**

Λύνουμε το σύστημα των (1) $\kappa\alpha\iota$ (2) και προκύπτει ότι:

$$\boldsymbol{\alpha=0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta=-1}$$

Άσκηση 4 σελ. 122 σχολικού βιβλίου

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2-x$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0,1)$ εφάπτεται και στην C_g.

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,1)$.

Είναι: $f(0)=1$, $f'(x)=e^x$ και : $f'(0)=e^0=1$.

Οπότε, η εφαπτομένη είναι : $y-f(0)=f'(0)(x-0) \Leftrightarrow$

$y-1=1x \Leftrightarrow y=x+1 \quad (\varepsilon)$

Για να είναι η (ε) εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της C_f πρέπει και αρκεί να υπάρχει x_o τέτοιο ώστε:

$$g(x_o)=x_o+1 \quad και \quad g'(x_o)=1$$

$$g(x_o)=x_o+1 \Leftrightarrow -x_o^2-x_o=x_o+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_o^2+2x_o+1=0 \Leftrightarrow (x_o+1)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_o+1=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x_o=-1}$$

$$g'(x_o)=1 \Leftrightarrow -2x_o-1=1 \Leftrightarrow -2x_o=2 \Leftrightarrow x_o=-1$$

Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0,1)$ εφάπτεται στη C_g στο $(-1,0)$.

Άσκηση 5 σελ. 122 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε πολυώνυμο τρίτου βαθμού τέτοιο, ώστε $f(0)=4$, $f'(-1)=2$, $f''(2)=4$ και $f^{(3)}(1)=6$.

Λύση

Αφού έχουμε ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού θα το γράψουμε ως εξής :

$$f(x)=ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta=0$$

$f'(x)=3ax^2+2\beta x+\gamma$

$f''(x)=6ax+2\beta$

$f^3(x)=6a$

Επομένως:

$$f(0)=4 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\delta=4}$$

$$f^3(1)=6 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{a=1}$$

$$f''(2)=4 \quad \Longrightarrow \quad 12+2\beta=4 \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\beta=-4}$$

$$f'(-1)=2 \quad \Longrightarrow \quad 3\cdot 1+2\cdot(-4)(-1)+\gamma=2 \quad \Leftrightarrow \boldsymbol{\gamma=-9}$$

Επομένως, το πολυώνυμο είναι: $f(x)=x^3-4x^2-9x+4$.

Άσκηση 7 σελ. 122 σχολικού βιβλίου

Αν μία συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=\alpha$, να αποδείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{xf(x)-\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=f(\alpha)+\alpha f'(\alpha)$

ii) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{e^x f(x)-e^\alpha f(\alpha)}{x-\alpha}=e^\alpha(f(\alpha)+f'(\alpha))$.

Λύση

i. Για να είναι η παραγωγίσιμη στο πρέπει να υπάρχει το όριο $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ και να είναι πραγματικός αριθμός. Άρα, πρέπει να εμφανίσουμε το αντίστοιχο κλάσμα στο δοσμένο όριο. Πρέπει λοιπόν να προσθαφαιρήσω τον κατάλληλο όρο.

Για $x\neq a$:

$$\frac{xf(x)-xf(a)+xf(a)-af(a)}{x-a}=$$

$$=\frac{x\big(f(x)-f(a)\big)}{x-a}+\frac{f(a)(x-a)}{x-a}$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to a}\frac{xf(x)-af(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x\big(f(x)-f(a)\big)}{x-a}+\lim_{x\to a}\frac{f(a)(x-a)}{x-a}=af'(a)+f(a)$$

ii. Για $x\neq a$:

$$\frac{e^x f(x) - e^x f(a) + e^x f(a) - af(a)}{x-a} =$$

$$= \frac{e^x\big(f(x) - f(a)\big)}{x-a} + \frac{f(a)(e^x - a)}{x-a}$$

Επομένως:

$$\operatorname{Lim}_{x\to a}\frac{e^x f(x)-e^a f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{e^x\big(f(x)-f(a)\big)}{x-a} + \lim_{x\to a}\frac{f(a)(e^x-a)}{x-a} =$$

$$= e^a f'(a) + f(a)e^a = e^a\big(f'(a) + f(a)\big)$$

Αν θέσουμε $g(x) = e^x f(x)$, τότε η $g'(a)$ υπάρχει αφού οι f, e^x παραγωγίζονται στο α.

Είναι : $g'(a) = e^a f'(a) + e^a f(a)$ αφού $(e^x)' = e^x$.

Είναι : $\lim_{x\longrightarrow a}\frac{e^x f(x)-e^a f(a)}{x-a} = g'(a) = e^a f'(a) + af(a)$.

Άσκηση 9 σελ. 122 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, ii) $f(x)=\sqrt[3]{x^4}$

Λύση

i. Επειδή $x^2 = |x|^2$ είναι:

Για $x \neq 0$ έχουμε : $f(x) = |x|^{\frac{2}{3}} = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & x \geq 0 \\ (-x)^{\frac{2}{3}}, & x < 0 \end{cases}$.

Αν $x > 0$, τότε : $f'(x) = \left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$.

Αν $x < 0$, τότε : $f'(x) = \left((-x)^{\frac{2}{3}}\right)' =$

$$= \frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}}(-x)' = -\frac{2}{3}(-x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{-x}}.$$

Για $x_o = 0$ είναι :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

Επομένως:

Αν είναι $x > 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{x}}{x\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

Οπότε : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$

Αν είναι $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x^2}\sqrt[3]{-x}}{x\sqrt[3]{-x}}=\frac{-1}{\sqrt[3]{-x}}$$

Οπότε : $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-1}{\sqrt[3]{-x}}=-\infty$

Στο 0 δεν έχει παράγωγο.

ii. Επειδή: $|x|^4=x^4$ είναι:

Για $x\neq 0$ έχουμε : $f(x)=|x|^{\frac{4}{3}}=\begin{cases} x^{\frac{4}{3}}, & x\geq 0\\ (-x)^{\frac{4}{3}}, & x<0\end{cases}$.

Αν $x>0$, τότε : $f'(x)=\left(x^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}=\frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Αν $x<0$, τότε : $f'(x)=\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'=\frac{-4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}=\frac{-4}{3}\sqrt[3]{x}$.

Για $x_o=0$ είναι :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x^4}}{x}$$

Επομένως:

Αν είναι $x>0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\sqrt[3]{x^3x}}{x}=\frac{x\sqrt[3]{x}}{x}=\sqrt[3]{x}$$

Οπότε : $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[3]{x}=0$

Αν είναι $x < 0$ έχουμε:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{(-x^3)\cdot(-x)}}{x} = -\sqrt[3]{-x}$$

Οπότε : $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt[3]{-x} = 0$.

Δηλαδή είναι : $f'(0) = 0$.

Άσκηση 10 σελ. 123 σχολικού βιβλίου

Έστω f μια παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f'(1)=1$ και g η συνάρτηση που ορίζεται από την ισότητα $g(x)=f(x^2+x+1)-1$, $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(1,f(1))$ εφάπτεται της C_g στο $B(0,g(0))$.

Λύση

Η g είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων. ‘Ετσι:

$$g'(x)=f'(x^2+x+1)\cdot(2x+1),$$

Οπότε $g'(0)=f'(1)=1$.

Επίσης, έχουμε $g(0)=f(1)-1$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \quad\Leftrightarrow\quad y=x-1+f(1) \qquad (1)$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $B(0,g(0))$ είναι:

$$y-f(0)=f'(0)(x-0) \quad\Leftrightarrow\quad y=x-1+f(1) \qquad (2)$$

Επομένως, η $y=x-1+f(1)$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f, C_g στα σημεία A,B αντίστοιχα.

Άσκηση 11 σελ. 123 σχολικού βιβλίου

Έστω μια συνάρτηση f, παραγωγίσιμη στο διάστημα $(-1,1)$, για την οποία ισχύει

$$f(\eta\mu x) = e^x\,\sigma\upsilon\nu x,\ \text{για κάθε } x \in (-\pi/2,\ \pi/2)$$

i) Να βρείτε την $f'(0)$

ii) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$ σχηματίζει με τους άξονες ισοσκελές τρίγωνο.

Λύση

i) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ και η $f(\eta\mu x)$ είναι σαν σύνθεση, έχουμε:

$$\left(f(\eta\mu x)\right)' = (e^x\sigma\upsilon\nu x)' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\eta\mu x)(\eta\mu x)' = e^x\sigma\upsilon\nu x + e^x(-\eta\mu x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(\eta\mu x)\sigma\upsilon\nu x = e^x(\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x)$$

Επομένως, για $x = 0$:

$$f'(\eta\mu 0)\sigma\upsilon\nu 0 = e^0(\sigma\upsilon\nu 0 - \eta\mu 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'(0) = 1$$

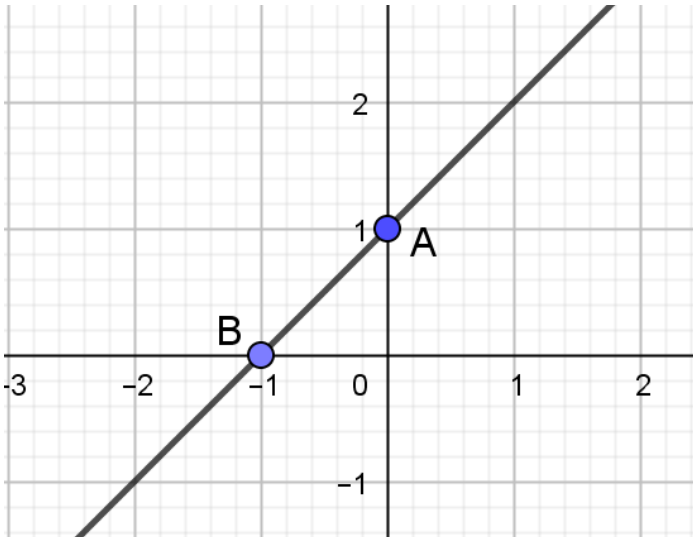
ii) Είναι : $f(0) = 1$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο A είναι : $y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow y = x + 1$.

Για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει τον $\chi'\chi$ βάζουμε $y = 0$. Οπότε έχουμε : $0 = x + 1 \Leftrightarrow \boldsymbol{x = -1}$.

Επομένως, τέμνει τον $\chi'\chi$ στο σημείο $\boldsymbol{B(-1, 0)}$.

Για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει τον $y'y$ βάζουμε $x = 0$. Οπότε έχουμε : $y = 1$

Επομένως, τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(\boldsymbol{0, 1})$.



Είναι : $(OA) = (OB) = 1$ οπότε το τρίγωνο OAB είναι ισοσκελές.