2.2 Παραγωγίσιμες συναρτήσεις – παράγωγος συνάρτηση

Α΄ Ομάδας

Α΄ Ομάδας

Άσκηση 2 σελ. 109 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο των συναρτήσεων:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x<1 \\ \sqrt{x} & , x\geq 1 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} ημx & , x<0 \\ x & , x\geq 0 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} x^3 & , x<2 \\ x^4 & , x\geq 2 \end{cases}$ iv) $f(x)=\begin{cases} x^2 & , x\leq 2/3 \\ x^3 & , x>2/3 \end{cases}$.

Λύση

i) Για κάθε $\boldsymbol{x<1}$ ισχύει $f'(x)=2x^{2-1}=2x$.

Για κάθε $\boldsymbol{x>1}$ ισχύει $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Εξετάζουμε αν η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_o=1$.

- Για $\boldsymbol{x<1}$ έχουμε : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$.

Έτσι έχουμε : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$.

- Για $\boldsymbol{x>1}$ έχουμε :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{\sqrt{x}^2-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Έτσι έχουμε : $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$.

Επομένως, η f δεν παραγωγίζεται στο 1 αφού :

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \neq \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

Έτσι έχουμε : $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < 1 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}}, & x > 1 \end{cases}$

ii)

Για κάθε $\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ ισχύει $f'(x) = (\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$.

Για κάθε $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ ισχύει $f'(x) = (x) = 1$

Εξετάζουμε αν η f παραγωγίζεται στο σημείο $x_o = 0$.

- Για $\boldsymbol{x} < \mathbf{0}$ έχουμε : $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\eta\mu x - 0}{x - 0} = \frac{\eta\mu x}{x}$.

Έτσι έχουμε : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$..

- Για $\boldsymbol{x} > \mathbf{0}$ έχουμε :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x - 0}{x - 0} = \frac{x}{x} = 1$$

Έτσι έχουμε : $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$.

Επομένως, η f παραγωγίζεται στο 0 αφού :

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1 = f'(0)$$

Έτσι έχουμε : $f'(x) = \begin{cases} \sigma\upsilon\nu x, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

iii)

Για κάθε $\boldsymbol{x} < \mathbf{2}$ ισχύει $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$.

Για κάθε $\boldsymbol{x} > \mathbf{2}$ ισχύει $f'(x) = 4x^{4-1} = 4x^3$.

Ελέγχουμε αν η f είναι συνεχής στο 2.

Για $\boldsymbol{x} < \mathbf{2}$ είναι : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^3 = 2^3 = 8$.

Για $\boldsymbol{x} > \mathbf{2}$ είναι : $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} x^4 = 2^4 = 16$.

Βλέπουμε ότι : $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$ και έτσι η f δεν παραγωγίζεται στο 2 .

Έτσι έχουμε : $f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x < 2 \\ 4x^3, & x > 2 \end{cases}$

iv)

Για κάθε $\boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ ισχύει $f'(x) = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$.

Για κάθε $\boldsymbol{x} > \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ ισχύει $f'(x) = 3x^{3-1} = 3x^2$.

Ελέγχουμε αν η f είναι συνεχής στο $\frac{2}{3}$.

Για $\boldsymbol{x} < \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ είναι : $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} x^2 = (\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9}$.

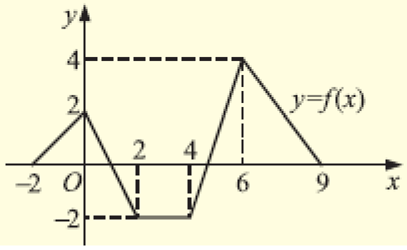
Για $\boldsymbol{x} > \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$ είναι : $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} f(x) = \lim\limits_{x\to \frac{2}{3}} x^3 = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$.

Βλέπουμε ότι : $\lim_{x\to\frac{2}{3}^-} f(x) \neq \lim_{x\to\frac{2}{3}^+} f(x)$ επομένως η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = \frac{2}{3}$ και έτσι η f δεν παραγωγίζεται στο $\frac{2}{3}$.

Έτσι έχουμε : $f'(x) = \begin{cases} 2x, & x < \frac{2}{3} \\ 3x^2, & x > \frac{2}{3} \end{cases}$

Άσκηση 3 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



Λύση

- Στο διάστημα $(-2,0)$, το 1^o τμήμα ενώνει τα σημεία $(-2,0)$ $και$ $(0,2)$ οπότε η κλίση του τμήματος είναι :

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-0}{0-(-2)}=\frac{2}{2}=1$$

- Στο διάστημα $(0,2)$, το 2^o τμήμα ενώνει τα σημεία $(0,2)$ $και$ $(2,-2)$ οπότε η κλίση του τμήματος είναι :

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-2-2}{2-0}=\frac{-4}{2}=-2$$

- Στο διάστημα $(2,4)$, το 3^o τμήμα είναι παράλληλο στον $\chi'\chi$ άρα η κλίση του είναι 0.

- Στο διάστημα $(4,6)$, το 4^o τμήμα ενώνει τα σημεία $(4,-2)$ $και$ $(6,4)$ οπότε η κλίση του τμήματος είναι :

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-(-2)}{6-4}=\frac{6}{2}=3$$

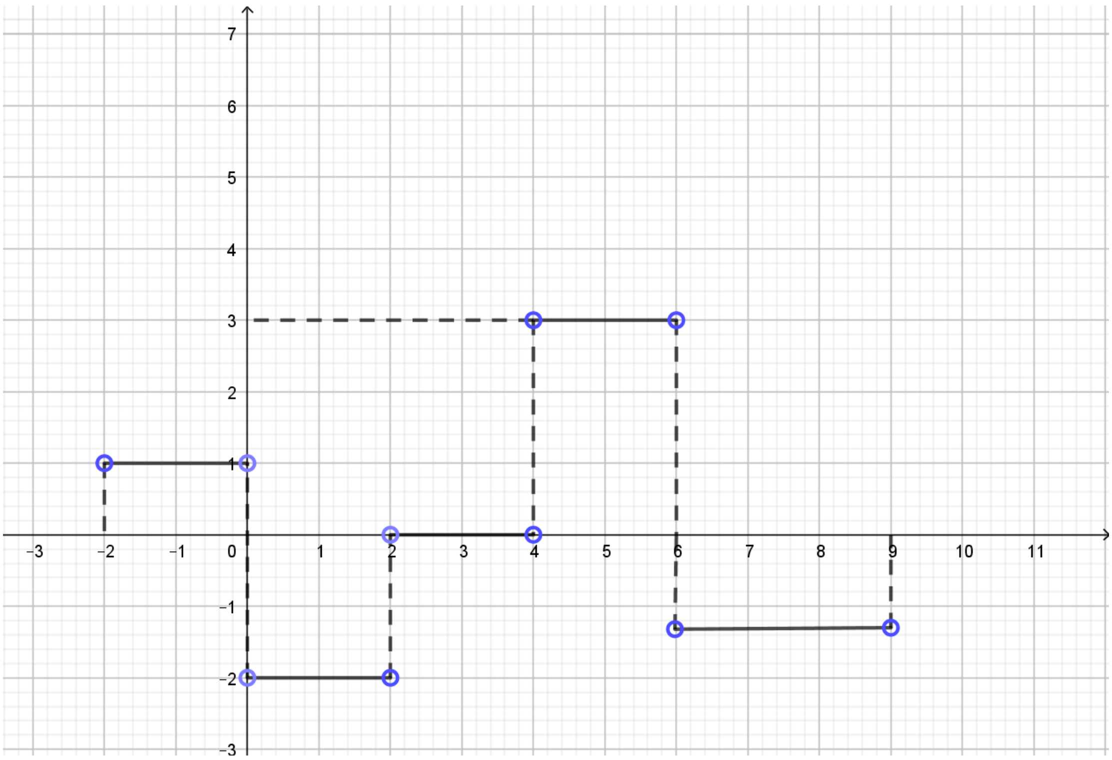
- Στο διάστημα (6,9), το 5^o τμήμα ενώνει τα σημεία (6,4) *και* (9,0) οπότε η κλίση του τμήματος είναι :

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-4}{9-6} = \frac{-4}{3} = -\frac{4}{3}$$

Θυμόμαστε ότι η κλίση της ευθείας είναι ίση με την παράγωγο, οπότε:

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-2,0) \\ -2, & x \in (0,2) \\ 0, & x \in (2,4) \\ 3, & x \in (4,6) \\ -\frac{4}{3}, & x \in (6,9) \end{cases}$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της παραγώγου είναι :



Β΄ Ομάδας

Άσκηση 1 σελ. 110 σχολικού βιβλίου

Να βρείτε τις τιμές των α, β για τις οποίες η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \eta\mu x & ,x<\pi \\ \alpha x+\beta & ,x\geq\pi \end{cases}$, είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\pi$.

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = \pi$ είναι και συνεχής στο $x_o = \pi$. Οπότε : $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^+} f(x) = f(\pi)$. **(1)**

$$\lim_{x\to\pi^+} f(x) = \lim_{x\to\pi^+}(\alpha x+\beta) = \alpha\pi+\beta$$

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-}(\eta\mu x) = \eta\mu\pi = 0$$

$Από\ την\ (1)\ έπεται : \alpha\pi+\beta = 0 \iff \boldsymbol{\beta = -\alpha\pi}.$

Αφού είναι παραγωγίσιμη έχουμε :

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\alpha x+\beta-(\alpha\pi+\beta)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^+}\frac{\alpha x-\alpha\pi}{x-\pi} =$$

$$\lim_{x\to\pi^+}\frac{\alpha(x-\pi)}{x-\pi} = \alpha$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{\eta\mu x-\eta\mu\pi}{x-\pi} = \lim_{x\to\pi^-}\frac{\eta\mu x-0}{x-\pi} =$$

$$\lim_{x\to\pi^-}\frac{\eta\mu(\pi-x)}{x-\pi} = -\lim_{x\to\pi^-}\frac{\eta\mu(\pi-x)}{\pi-x} = -1$$

Γιατί :

Θέτουμε $u = \pi - x$. Αφού $x \longrightarrow \pi^-$ θα είναι : $u \longrightarrow 0^-$. Έτσι το όριο γίνεται : $\lim\limits_{u \longrightarrow 0^-} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$.

Από τη σχέση (2) έπεται ότι : $\boldsymbol{\alpha = -1}$.

Πιο πάνω είδαμε ότι $\beta = -\alpha\pi$. Έτσι για $\alpha = -1$ είναι : $\boldsymbol{\beta = -\pi}$.

Άσκηση 2 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ και το σημείο $A(\xi, f(\xi))$, $\xi \neq 0$ της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(-\xi, 0)$ εφάπτεται της C_f στο A.

Λύση

Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Οπότε και για $\xi>0$ είναι :

$$f'(\xi)=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(\xi, f(\xi))$ είναι :

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y-\sqrt{\xi}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}(x-\xi) \Leftrightarrow$$

$$y=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}x-\frac{\xi}{2\sqrt{\xi}}+\sqrt{\xi}=\frac{1}{2\sqrt{\xi}}x+\frac{\sqrt{\xi}}{2}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι αυτή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $B(-\xi, 0)$.

Για $x=-\xi$:

$$y=-\frac{1}{2\sqrt{\xi}}\xi+\frac{\sqrt{\xi}}{2}=-\frac{\xi\sqrt{\xi}}{2\sqrt{\xi}^2}+\frac{\sqrt{\xi}}{2}=-\frac{\sqrt{\xi}}{2}+\frac{\sqrt{\xi}}{2}=\mathbf{0}.$$

Άσκηση 3 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^3$ σε οποιοδήποτε σημείο της $M(\alpha, \alpha^3)$, $\alpha \neq 0$ έχει με αυτήν και άλλο κοινό σημείο N εκτός του M. Στο σημείο N η κλίση της C_f είναι τετραπλάσια της κλίσης της στο M.

Λύση

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο M είναι :

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Αρχικά βρίσκουμε την παράγωγο της f.

$$f'(x) = 3x^2$$

Είναι : $f(a) = a^3$ και $f'(a) = 3a^2$.

Έτσι, η εφαπτομένη γίνεται : $y - a^3 = 3a^2(x - a) \Leftrightarrow$

$y = 3a^2x - 3a^3 + a^3 \Leftrightarrow y = 3a^2x - 2a^3$

Για να βρούμε τα κοινά σημεία της C_f και της εφαπτομένης αρκεί να λύσουμε το σύστημα :

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3a^2x - 2a^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 \\ x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x^3 - a^2x - 2a^2x + 2a^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x(x^2 - a^2) - 2a^2(x - a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x(x - a)(x + a) - 2a^2(x - a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ (x-a)(x^2+ax-2a^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ x = a \quad \text{ή} \quad x = -2a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = a \\ y = a^3 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} x = -2\alpha \\ y = -8a^3 \end{cases}$$

Επομένως, έχουν 2 κοινά σημεία τα $M(\alpha,\alpha^3)$ και $N(-2\alpha,-8\alpha^3)$.

Η κλίση στο M είναι $f'(a)=3a^2$.

Η κλίση στο N είναι : $f'(-2a)=3(-2a)^2=12a^2=4\cdot 3a^2=4f'(a)$.

Άσκηση 4 σελ. 102 σχολικού βιβλίου

Έστω ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{1}{x}$ σε ένα σημείο της $M\left(\xi,\dfrac{1}{\xi}\right)$. Αν A, B είναι τα σημεία στα οποία η ε τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι

i) Το M είναι μέσο του AB.

ii) Το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι σταθερό, δηλαδή ανεξάρτητο του $\xi\in\mathbb{R}^*$.

Λύση

i) Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο M είναι :

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi)$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-1x^{-2}=-\frac{1}{x^2},\ \ x\neq 0$$

$$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi^2}$$

$$f(\xi)=\frac{1}{\xi}$$

Οπότε η εφαπτομένη είναι : $y-\frac{1}{\xi}=-\frac{1}{\xi^2}(x-\xi)\ \Leftrightarrow$

$$y=-\frac{1}{\xi^2}x+\frac{1}{\xi}+\frac{1}{\xi}=-\frac{1}{\xi^2}x+\frac{2}{\xi}$$

Για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει τον y'y βάζουμε όπου x το 0.

Οπότε : $y=\frac{2}{\xi}$. Άρα το B είναι το $B\left(0,\frac{2}{\xi}\right)$.

Για να βρούμε σε ποιο σημείο τέμνει τον x'x βάζουμε όπου y το 0.

Οπότε : $0=-\frac{1}{\xi^2}x+\frac{2}{\xi}\Leftrightarrow -x+2\xi=0\Leftrightarrow x=2\xi$.

Επομένως, το σημείο A είναι το $A(2\xi,0)$.

Το μέσο του AB είναι το $\left(\frac{2\xi+0}{2},\frac{\frac{2}{\xi}+0}{2}\right)=(\xi,\frac{1}{\xi})$ δηλαδή το σημείο M.

ii) $E=\frac{1}{2}(OA)(OB)=\frac{1}{2}|2\xi|\cdot\left|\frac{2}{\xi}\right|=\frac{1}{2}\left|2\xi\cdot\frac{2}{\xi}\right|=2\ \tau.\mu.$