1.8 Συνέχεια Συνάρτησης

Α Ομάδας

Άσκηση 2 σελ. 79

2. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο x_0 τις παρακάτω συναρτήσεις:

i) $f(x)=\begin{cases} x^2+4, & x<2 \\ x^3 \quad , & x\geq 2 \end{cases}$, αν $x_0=2$

ii) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x<1 \\ \sqrt{3+x}, & x\geq 1 \end{cases}$, αν $x_0=1$

iii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x+2}, & x\neq -2 \\ -3 \quad , & x=-2 \end{cases}$, αν $x_0=-2$.

Λύση

i. Καταρχάς θα εξετάσουμε αν **υπάρχει το όριο** στο x_o, παίρνοντας **πλευρικά όρια.**

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 2^2 + 4 = 8,\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2^3 = 8$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=8$. Για να βρούμε το $f(2)$ πηγαίνουμε στον **κάτω κλάδο**

$f(2) = 2^3 = 8.$

Άρα $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = f(2) \Rightarrow f\ συνεχής\ στο\ x_o = 2$

ii. Καταρχάς θα εξετάσουμε αν **υπάρχει το όριο** στο x_o, παίρνοντας **πλευρικά όρια.**

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1^2 + 1 = 2,\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$. Για να βρούμε το $f(1)$πηγαίνουμε στον **κάτω κλάδο** $f\ (1)\ =\ \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$.

Άρα $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \ f(1)\ \Rightarrow\ f\ συνεχής\ στο\ x_O =\ 1$

iii. $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^2+x-2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim\limits_{x\to -2}(x-1) = -2-1 = -3 = f(-2)$

Επομένως, η f είναι συνεχής στο $x_O =\ -2$.

Άσκηση 3 σελ. 80

3. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τις παρακάτω συναρτήσεις και μετά να χαράξετε τη γραφική τους παράσταση, αν

i) $f(x)=\begin{cases} 2x^2, & |x|\le 1 \\ \dfrac{2}{x}, & |x|>1 \end{cases}$ ii) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-5x+6}{x-2}, & x\neq 2 \\ 5, & x=2 \end{cases}$

iii) $f(x)=\begin{cases} x, & x<1 \\ \ln x, & x\ge 1 \end{cases}$ iv) $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ -x^2+1, & x>0 \end{cases}$.

Λύση

i) Ο τύπος της συνάρτησης γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2, & -1\le x\le 1 \\ \frac{2}{x}, & x<-1 \text{ ή } x>1 \end{cases}$$

Η διαφορά σε σχέση με την προηγούμενη άσκηση είναι η εξής: Πριν μας ζητήθηκε να εξετάσουμε την συνέχεια στο x_o. Τώρα μας ζητείται να εξετάσουμε την συνέχεια **σε ολόκληρο το πεδίο ορισμού** των συναρτήσεων.

Στο διάστημα $(-1,\ 1)$ είναι $f(x)=2x^2$, συνεχής σαν πολυωνυμική.

Στα διαστήματα $(-\infty,\ -1)$, $(1,\ +\infty)$ είναι $f(x)=\frac{2}{x}$ συνεχής σαν ρητή.

***Στο* -1 :**

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{2}{x}=\frac{2}{-1}=-2\ \neq\ f(-1)=2(-1)^2=2$$

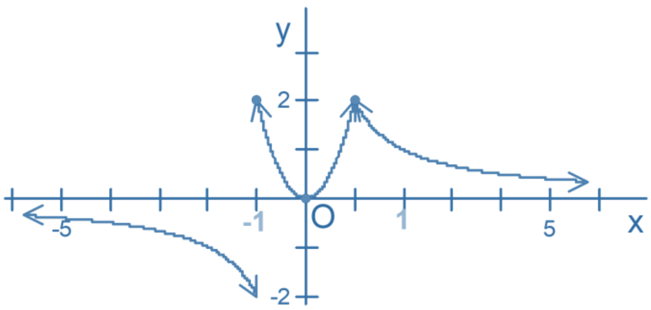
Άρα η f **δεν** είναι συνεχής στο $x_0=-1$

***Στο* 1 :**

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} (2x^2) = 2\cdot1^2 = 2,$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2, \; f(-1) = 2$

Άρα f συνεχής στο $x_0 = 1$.



ii) Για $x \neq 2$, ο τύπος της συνάρτησης γράφεται

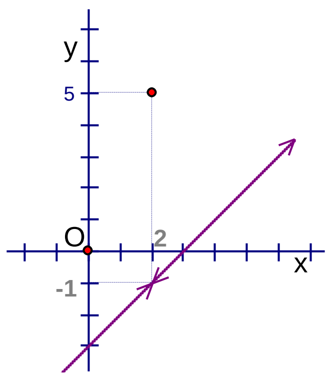
$f(x) = \frac{(x-2)(x-3)}{x-2} = x - 3$

Στο $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ είναι $f(x) = x - 3$,

συνεχής σαν πολυωνυμική.

$\lim\limits_{x\to2} f(x) = \lim\limits_{x\to2} (x - 3) = 2 - 3 = -1 \neq f(2) = 5$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.



iii)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x < 1 \\ lnx, & x \geq 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} x = 1$

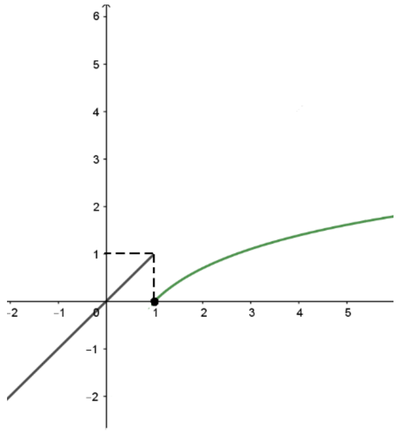
$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} lnx = ln1 = 0$

Είναι : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$.

Άρα, η f δεν είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Για $x < 1$, η $f(x) = x$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.

Για $x \geq 1$, η $f(x) = lnx$ είναι συνεχής ως λογαριθμική.



iv) $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ -x^2 + 1, & x > 0 \end{cases}$

$f(0) = e^0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1$

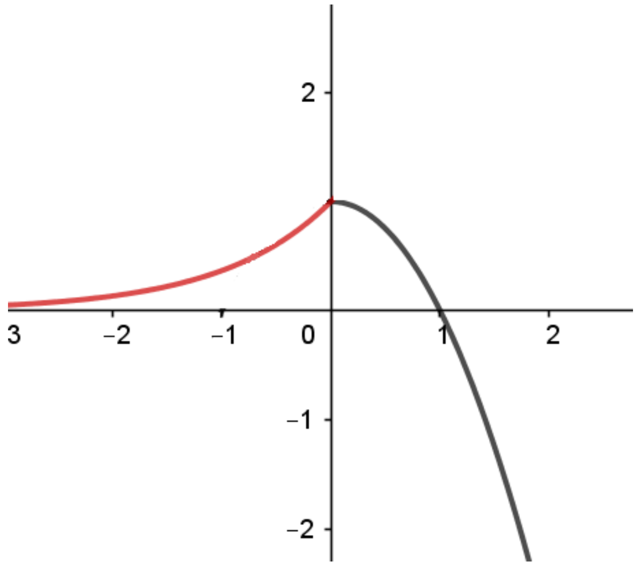
$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (-x^2 + 1) = 1$

Είναι : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$.

Άρα, η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για $x \leq 0$, η $f(x) = e^x$ είναι συνεχής ως εκθετική.

Για $x > 1$, η $f(x) = -x^2 + 1$ είναι συνεχής ως πολυωνυμική.



Άσκηση 6 σελ. 80

6. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση ημx − x + 1 = 0 έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα (0, π).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x - x + 1$ στο διάστημα $[0, \pi]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, \pi]$ ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $\eta\mu x$ και $-x + 1$.

Επίσης :

$f(0) = \eta\mu 0 - 0 + 1 = 1 > 0,\qquad f(\pi) = \eta\mu\pi - \pi + 1 = 1 - \pi < 0$

- Οπότε : $f(0) \cdot f(\pi) < 0$.

Οπότε, από το θεώρημα Bolzano συνεπάγεται ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ δηλαδή η εξίσωση $\eta\mu x - x + 1 = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, \pi)$.

Άσκηση 7 σελ.80

7. Για κάθε μία από τις παρακάτω πολυωνυμικές συναρτήσεις f, να βρείτε έναν ακέραιο α τέτοιον, ώστε στο διάστημα $(\alpha, \alpha+1)$ η εξίσωση $f(x)=0$ να έχει μία τουλάχιστον ρίζα

i) $f(x)=x^3+x-1$ ii) $f(x)=x^5+2x+1$

iii) $f(x)=x^4+2x-4$ iv) $f(x)=-x^3+x+2$.

Λύση

Και οι τέσσερις συναρτήσεις της άσκησης είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμικές. Θα πρέπει να βρούμε κατάλληλη τιμή του α, με σκοπό να ικανοποιείται η συνθήκη $f(a)\cdot f(a+1)<0$ του θεωρήματος Bolzano.

i) Για $x=0$: $f(0)=0^3+0-1=-1<0$.

Για $x=1$: $f(1)=1^3+1-1=1>0$.

$f(0)\cdot f(1)<0$. Άρα, ικανοποιείται ο Bolzano και είναι $\alpha=0$.

ii) Για $x=0$: $f(0)=0^5+2\cdot 0+1=1>0$.

Για $x=-1$: $f(-1)=(-1)^3+2\cdot(-1)+1=-2<0$.

$$f(-1)\cdot f(0)<0$$

Άρα, ικανοποιείται ο Bolzano και είναι $\alpha=-1$.

iii) Για $x=1$: $f(1)=1^4+2\cdot 1-4=-1<0$.

Για $x=2$: $f(2)=2^4+2\cdot 2-4=16>0$.

$$f(1)\cdot f(2)<0$$

Άρα, ικανοποιείται ο Bolzano και είναι $\alpha=1$.

iv) Για $x=1$: $f(1)=-1^3+1+2=2>0$.

Για $x=2$: $f(2)=-2^3+2+2=-4>0$.

$$f(1)\cdot f(2)<0$$

Άρα, ικανοποιείται ο Bolzano και είναι $\alpha=1$.

Άσκηση 8 σελ.81

8. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\alpha(x-\mu)(x-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)=0,$$

όπου $\alpha, \beta, \gamma > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$, έχει δυο ρίζες άνισες, μια στο διάστημα (λ, μ) και μια στο (μ, ν).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$f(x)=\alpha(x-\mu)(x-\nu)+\beta(x-\lambda)(x-\nu)+\gamma(x-\lambda)(x-\mu)$$

Η f είναι πολυωνυμική σαν άθροισμα τριωνύμων είναι συνεχής παντού.

Επίσης :

$$f(\lambda)=\alpha(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)>0, \qquad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \alpha>0, \lambda<\mu\ \kappa\alpha\iota\ \lambda<\nu.$$

$$f(\mu)=\beta(\mu-\lambda)(\mu-\nu)<0, \qquad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \beta>0, \lambda<\mu\ \kappa\alpha\iota\ \mu<\nu.$$

$$f(\nu)=\gamma(\nu-\mu)(\nu-\mu)>0, \qquad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \gamma>0, \mu<\nu\ \kappa\alpha\iota\ \lambda<\mu.$$

Οπότε :

$$f(\lambda)\cdot f(\mu)<0\ \ \kappa\alpha\iota\ f(\mu)\cdot f(\nu)<0$$

Δηλαδή, ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος Bolzano στα δύο διαστήματα. Οπότε :

Υπάρχει , ένα τουλάχιστον $x_1 \in (\lambda, \mu)$: $f(x_1)=0$ και ένα τουλάχιστον $x_2 \in (\mu, \nu)$: $f(x_2)=0$.

Άσκηση 9 σελ. 81

9. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του x, όταν:

i) $f(x)=x^3+2x^2-x-2$ ii) $f(x)=x^4-9x^2$

iii) $f(x)=\varepsilon\varphi x-\sqrt{3},\ x\in(-\pi,\pi)$ iv) $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,2\pi]$.

Λύση

i) Αρχικά : πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση :

$f(x)=0 \Leftrightarrow x^3+2x^2-x-2=0 \Leftrightarrow x^2(x+2)-(x+2)=0$

$\Leftrightarrow (x+2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=-2$ ή $x=1$ ή $x=-1$

Τα $-2,-1,1$ χωρίζουν το πεδίο ορισμού σε 4 διαστήματα:

$$(-\infty,-2]\cup[-2,-1]\cup[-1,1]\cup[1,+\infty)$$

Φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα.

Διάστημα	$(-\infty,-2)$	$(-2,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
Αριθμός x_o	-3	$-\frac{3}{2}$	0	2
$f(x_o)$	$-8<0$	$\frac{5}{8}>0$	$-2<0$	$12>0$
Πρόσημο της f.	$-$	$+$	$-$	$+$

Σε κάθε διάστημα πήραμε έναν τυχαίο αριθμό x_o, υπολογίσαμε το αντίστοιχο $f(x_o)$ και ανάλογα με το πρόσημο του $f(x_o)$ στο αντίστοιχο διάστημα, βρίσκουμε και το πρόσημο της f σε αυτό.

ii) Αρχικά : πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Συνεχής ως πολυωνυμική στο $\mathbb{R}$.

Στη συνέχεια λύνουμε την εξίσωση :

$f(x) = 0 \iff x^4 - 9x^2 = 0 \iff x^2(x^2 - 9) = 0 \iff$

$x^2(x-3)(x+3) = 0 \iff x = 0$ ή $x = 3$ ή $x = -3$

Τα $-3,\ 0, 3$ χωρίζουν το πεδίο ορισμού σε 4 διαστήματα:

$$(-\infty, -3] \cup [-3,0] \cup [0,3] \cup [3, +\infty)$$

Φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα.

Διάστημα	$(-\infty, -3)$	$(-3, -0)$	$(0, 3)$	$(3, +\infty)$
Αριθμός x_o	-4	-1	1	4
$f(x_o)$	$112 > 0$	$-8 < 0$	$-8 < 0$	$112 > 0$
Πρόσημο της f.	$+$	$-$	$-$	$+$

iii) Η f είναι συνεχής στο$\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

$f(x) = 0 \iff εφx - \sqrt{3} = 0 \iff εφx = \sqrt{3} \iff εφx = εφ\frac{\pi}{3} \iff$

$x = \frac{\pi}{3}$ ή $x = -\frac{2\pi}{3}$

Φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα.

Διάστημα	$\left(-\pi, -\frac{2\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$
Αριθμός x_o	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{7\pi}{12}$	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{4}$
$f(x_o)$	$-1-\sqrt{3} < 0$	$2 > 0$	$-\sqrt{3} < 0$	$2 > 0$	$-1-\sqrt{3} < 0$
Πρόσημο της f.	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$

iv) $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x,\ x\in[0,2\pi]$

Η f είναι συνεχής στο $[0,2\pi]$.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0 \Leftrightarrow \eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$

$\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=-1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow$

$$x=\kappa\pi+\frac{3\pi}{4}$$

Στο διάστημα $[0,2\pi]$ βρίσκονται οι ρίζες $\frac{3\pi}{4}$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{7\pi}{4}$.

Διάστημα	$[0,\frac{3\pi}{4})$	$(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$	$(\frac{7\pi}{4},2\pi]$
Αριθμός x_o	0	π	2π
$f(x_o)$	$1>0$	$-1<0$	$1>0$
Πρόσημο της f.	$+$	$-$	$+$

Άσκηση 10 σελ. 81

Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων

i) $f(x) = \ln x - 1,\ x \in [1, e]$ ii) $f(x) = -x + 2,\ x \in (0,2)$

iii) $f(x) = 2\eta\mu x + 1,\ x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ iv) $f(x) = e^x + 1,\ x \in (-\infty, 0]$.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής ως λογαριθμική στο $[1, e]$.

$x_1 < x_2 \Rightarrow lnx_1 < lnx_2 \Rightarrow lnx_1 - 1 < lnx_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Δηλαδή, η f είναι γνησίως αύξουσα. (Εξάλλου μπορούμε να το δικαιολογήσουμε και ως εξής : η lnx είναι γνησίως αύξουσα άρα και η $lnx - 1$ θα είναι το ίδιο).

$$f(1) = ln1 - 1 = 0 - 1 = -1$$

$$f(e) = lne - 1 = 1 - 1 = 0$$

Οπότε : $f([1, e]) = [-1,0]$.

ii) Η f είναι συνεχής στο $(0,2)$ και γνησίως φθίνουσα (είναι της μορφής $\alpha x + \beta,\ \alpha < 0$).

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (-x + 2) = 2$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x + 2) = 0$$

Οπότε : $f\big((0,2)\big) = (0,2)$.

iii) Η $f(x) = 2\eta\mu x + 1$, *είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$

$f(0) = 2\eta\mu 0 + 1 = 1$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{6}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}^-} (2\eta\mu x + 1) = 2\eta\mu\frac{\pi}{6} + 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$$

Οπότε : $f\left(\left[0,\frac{\pi}{6}\right)\right) = [1,2)$.

iv) Η $f(x) = e^x + 1$ *είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο* $(-\infty, 0]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x + 1) = 0 + 1 = 1$

$f(0) = e^0 + 1 = 1 + 1 = 2$

Οπότε : $f\big((-\infty, 0]\big) = (1,2]$.

Β΄ ομάδα

Άσκηση 1 σελ. 81

Αν $f(x)=\begin{cases}(x-\kappa)(x+\kappa) & , \quad x\leq 2\\ \kappa x+5 & , \quad x>2\end{cases}$, να προσδιορίσετε το κ, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=2$.

Λύση

Για να είναι συνεχής στο $x_o=2$, πρέπει να ισχύει :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x-k)(x+k) = (2-k)(2+k)$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (kx+5) = 2k+5$

Άρα : $(2-\kappa)(2+\kappa) = 2\kappa+5 \Leftrightarrow 4-\kappa^2 = 2\kappa+5 \Leftrightarrow$

$\kappa^2+2\kappa+1=0 \Leftrightarrow (\kappa+1)^2=0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\kappa=-1}$

Άσκηση 2 σελ. 81

. Αν $f(x)=\begin{cases} \alpha^2x^2+\beta x-12 & , \quad x<1 \\ 5 & , \quad x=1 \\ \alpha x+\beta & , \quad x>1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Λύση

Για να είναι συνεχής στο $x_o = 1$, πρέπει να ισχύει :

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 5$$

$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(\alpha^2x^2+\beta x-12) = \alpha^2\cdot 1^2+\beta\cdot 1-12 =$

$\alpha^2+\beta-12$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(\alpha x+\beta) = \alpha\cdot 1+\beta = \alpha+\beta$

Άρα : $\alpha^2+\beta-12 = \alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha-12=0 \Leftrightarrow$

$\alpha=-3$ ή $\alpha=4$

Και $\alpha+\beta=5 \Leftrightarrow \beta=5-\alpha$

Για $\alpha=4$: $\beta=5-4=1$

Για $\alpha=-3$: $\beta=5-(-3)=8$

Άσκηση 3 σελ. 81

i) Έστω μία συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Να βρείτε το $f(0)$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$xf(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1.$$

ii) Ομοίως, να βρείτε το $g(0)$ για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$|xg(x) - \eta\mu x| \leq x^2.$$

Λύση

i) $H\ f$ η οποία είναι συνεχής στο $x_o = 0$ οπότε : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$. (1)

$$xf(x) = \sigma\upsilon\nu x - 1 \Leftrightarrow f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, \qquad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

(1) $\Rightarrow f(0) = 0.$

ii) $H\ g$ η οποία είναι συνεχής στο $x_o = 0$ οπότε : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = g(0)$. (2)

$$|xg(x) - \eta\mu x| \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 \leq xg(x) - \eta\mu x \leq x^2 \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu x - x^2 \leq xg(x) \leq \eta\mu x + x^2$$

Για $x > 0$:

$$\frac{\eta\mu x - x^2}{x} \leq g(x) \leq \frac{\eta\mu x + x^2}{x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\eta\mu x}{x} - x \leq g(x) \leq \frac{\eta\mu x}{x} + x$$

Είναι : $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - x\right) = 1 - 0 = 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + x\right) = 1 + 0 = 1$

Έτσι από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1.$

Για $x < 0$:

$$\frac{\eta\mu x - x^2}{x} \geq g(x) \geq \frac{\eta\mu x + x^2}{x} \Leftrightarrow$$
$$\frac{\eta\mu x}{x} - x \geq g(x) \geq \frac{\eta\mu x}{x} + x$$

Είναι : $\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} - x\right) = 1 - 0 = 1$

$\lim\limits_{x \to 0^-} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + x\right) = 1 + 0 = 1$

Έτσι από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει : $\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = 1.$

Άρα, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = 1.$

Επομένως ,από τη σχέση (2) $\Longrightarrow$ $g(0) = \lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1.$

Β′ τρόπος

Είναι : $|xg(x) - \eta\mu x| \leq |x|^2.$

Αν $x \neq 0$, $\left|g(x) - \frac{\eta\mu x}{x}\right| \leq |x|.$

Οπότε : $-|x| \leq g(x) - \frac{\eta\mu x}{x} \leq |x|$

Άρα, $\lim\limits_{x \to 0}|x| = \lim\limits_{x \to 0}(-|x|) = 0$ και $\lim\limits_{x \to 0}\left(g(x) - \frac{\eta\mu x}{x}\right) = 0$

Επειδή, $\lim\limits_{x \to 0}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$ και $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 1.$

Άσκηση 4 σελ.81

Αν οι συναρτήσεις f, g είναι ορισμένες και συνεχείς στο $[0,1]$ και πληρούν τις σχέσεις $f(0) < g(0)$ και $f(1) > g(1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Λύση

$f(\xi) = g(\xi) \Leftrightarrow f(\xi) - g(\xi) = 0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x),\ x \in [0,1]$.

Αφού οι f, g είναι συνεχείς στο $[0,1]$ είναι και η h ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

$h(0) = f(0) - g(0) < 0,\ \textit{αφού}\ f(0) < g(0)$

$h(1) = f(1) - g(1) > 0,\ \textit{αφού}\ f(1) > g(1)$

Επομένως, $h(0) \cdot h(1) < 0$.

Ικανοποιούνται οι συνθήκες του Bolzano , επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$: $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$

Άσκηση 5 σελ. 82

Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

α) $\frac{x^4+1}{x-1}+\frac{x^6+1}{x-2}=0$ β) $\frac{e^x}{x-1}+\frac{\ln x}{x-2}=0$

έχουν μια, τουλάχιστον, ρίζα στο (1, 2).

Λύση

α) $\frac{x^4+1}{x-1}+\frac{x^6+1}{x-2}=0 \Leftrightarrow (x-2)(x^4+1)+(x^6+1)(x-1)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$f(x)=(x-2)(x^4+1)+(x^6+1)(x-1),\ x\in(1,2).$

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[1,2]$.

$f(1)=(1-2)(1^4+1)+(1^6+1)(1-1)=-1\cdot 2=-2$

$f(2)=(2-2)(2^4+1)+(2^6+1)(2-1)=65$

Επομένως, $f(1)\cdot f(2)<0$.

Ικανοποιούνται οι συνθήκες Bolzano στο $[1,2]$, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(1,2)$: $f(x_o)=0$, δηλαδή η $f(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο$(1,2)$.

β) $\frac{e^x}{x-1}+\frac{lnx}{x-2}=0 \Leftrightarrow e^x(x-2)+lnx(x-1)=0$

Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$f(x)=e^x(x-2)+lnx(x-1)=,\ x\in(1,2).$

Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο $[1,2]$.

$f(1)=e^1(1-2)+ln1(1-1)=-e$

$f(2) = e^2(2-2) + ln2(2-1) = ln2 > 0$

αφού $2 > 1 \Leftrightarrow ln2 > ln1 = 0$

Επομένως, $f(1) \cdot f(2) < 0$.

Ικανοποιούνται οι συνθήκες Bolzano στο $[1,2]$, επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (1,2)$: $f(x_o) = 0$, δηλαδή η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο$(1,2)$.

Άσκηση 6 σελ. 82

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο

i) $f(x)=e^x$ και $g(x)=\frac{1}{x}$ ii) $f(x)=\ln x$ και $g(x)=-\frac{1}{x}$

Λύση

i. $D_f=\mathbb{R}$ και $D_g=\mathbb{R}^*$

Αρκεί η εξίσωση $f(x)=g(x)$, δηλαδή η εξίσωση $e^x=\frac{1}{x}$ να έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}^*$.

Είναι $e^x>0$ οπότε και $\frac{1}{x}>0$ και άρα $x>0$. Αναζητάμε τη ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x),\ x\in(0,+\infty)$.

Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Θα τη μελετήσουμε τώρα ως προς τη μονοτονία (με βάση τον ορισμό).

Έστω $x_1,x_2\in(0,+\infty),\ x_1<x_2$.

$x_1<x_2 \Longrightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$ (1)

$x_1<x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1}<-\frac{1}{x_2}$ (2)

$(1)+(2) \Rightarrow e^{x_1}-\frac{1}{x_1}<e^{x_2}-\frac{1}{x_2} \Rightarrow h(x_1)<h(x_2) \Rightarrow$

h γνησίως αύξουσα.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της h :

$\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to0^+}e^x-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x}=$

$e^0-\infty=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=$

$+\infty - 0 = +\infty$

Οπότε : $h(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

$0 \in h(A) = \mathbb{R}$ και η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, +\infty)$: $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$.

ii. $D_f = (0, +\infty)$ και $D_g = \mathbb{R}^*$

Αρκεί η εξίσωση $f(x) = g(x)$, δηλαδή η εξίσωση $lnx = \frac{1}{x}$ να έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0, +\infty)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in (0, +\infty)$.

Η h είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Θα τη μελετήσουμε τώρα ως προς τη μονοτονία (με βάση τον ορισμό).

Έστω $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, $x_1 < x_2$.

$x_1 < x_2 \Longrightarrow lnx_1 < lnx_2 \qquad (1)$

$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Rightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \qquad (2)$

$(1) + (2) \Rightarrow lnx_1 - \frac{1}{x_1} < lnx_2 - \frac{1}{x_2} \Rightarrow h(x_1) < h(x_2) \Rightarrow$

h γνησίως αύξουσα.

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της h :

$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(lnx - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to 0^+} lnx - \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} =$

$-\infty - \infty = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(lnx - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} lnx - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} =$

$+\infty - 0 = +\infty$

Οπότε : $h(A) = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$.

$0 \in h(A) = \mathbb{R}$ και η h είναι γνησίως αύξουσα, άρα υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, +\infty)$: $h(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) = g(\xi)$.

Άσκηση 7 σελ. 82

i) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-1,1]$, για την οποία ισχύει

$$x^2+f^2(x)=1 \text{ για κάθε } x\in[-1,1].$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$.

β) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί το πρόσημό της στο διάστημα $(-1,1)$.

γ) Ποιος μπορεί να είναι ο τύπος της f και ποια η γραφική της παράσταση;

ii) Με ανάλογο τρόπο να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x)=x^2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Λύση

i)

a. $x^2+f^2(x)=1 \Leftrightarrow f^2(x)=1-x^2,\ x\in[-1,1]$. **(1)**

$f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow 1-x^2=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow$

$x=-1$ ή $x=1$

b. Η f είναι συνεχής στο $(-1,1)$ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, οπότε διατηρεί το πρόσημό της.

c. Αν $f(x)>0$ και αφού η f διατηρεί πρόσημο από (1) προκύπτει ότι :

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\ \ \sigma\tau o\ (-1,1)$$

Και επειδή $f(-1)=f(1)=0$ έχουμε :

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}\ \ \sigma\tau o\ [-1,1]$$

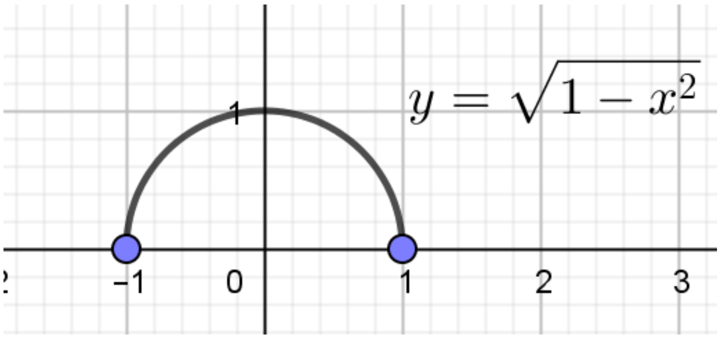
Αν $f(x)<0$ και αφού η f διατηρεί πρόσημο από (1) προκύπτει ότι :

$$f(x)=-\sqrt{1-x^2}\ \ \sigma\tau o\ (-1,1)$$

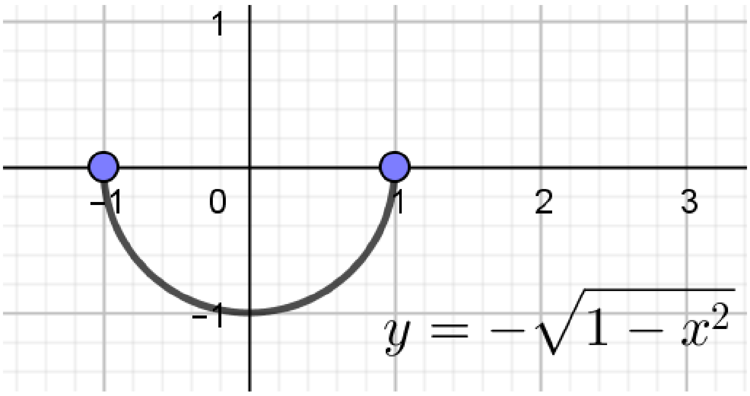
Και επειδή $f(-1) = f(1) = 0$ έχουμε :

$$f(x) = -\sqrt{1-x^2} \;\; \sigma\tau o \; [-1,1]$$

Γραφική παράσταση :



Ή



ii) a. $f^2(x) = x^2,\; x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = x$ ή $f(x) = -x\,,\; x \in \mathbb{R}$ **(3)**

$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f^2(x) = 0 \quad \Leftrightarrow x^2 = 0 \;\Leftrightarrow x = 0 \; \mu o \nu \alpha \delta \iota \kappa \acute{\eta} \; \rho \acute{\iota} \zeta \alpha.$

b. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και δε μηδενίζεται σ΄ αυτό οπότε διατηρεί το πρόσημό της στο $(-\infty, 0)$. Ομοίως, στο $(0, +\infty)$.

Αφού η f διατηρεί πρόσημο στο $(-\infty, 0)$, από την (3) θα είναι :

$f(x) = x$ ή $f(x) = -x \;\; \sigma\tau o \; (-\infty, 0).$

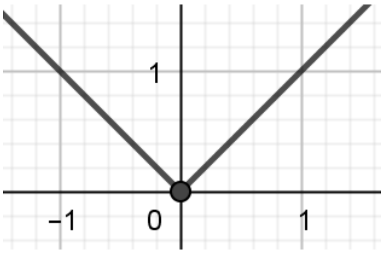
Το 0 είναι ρίζα , $f(0) = 0$, θα είναι :

$$f(x) = x \text{ ή } f(x) = -x \;\; \text{στο } (-\infty, 0]$$

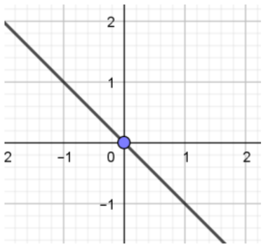
Ομοίως, $f(x)=x$ ή $f(x)=-x$ στο $[0,+\infty)$.

Προκύπτουν οι συνδυασμοί :

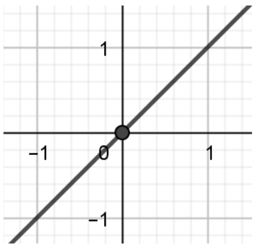
1) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ x, & x\ge 0\end{cases}$ ή αλλιώς $f(x)=|x|$



2) $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=-x\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}$



3) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ x, & x\ge 0\end{cases}\Rightarrow f(x)=x\ \sigma\tau o\ \mathbb{R}$



4) $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0\\ -x, & x\ge 0\end{cases}$ ή αλλιώς $f(x)=-|x|$.