1.7 ΟΡΙΟ ΣΤΟ ΑΠΕΙΡΟ

Α΄ Ομάδας

Άσκηση 1 σελ. 68

Να βρείτε τα όρια :

i. $\lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3+2x-5)$

ii. $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-2x+1)$

iii. $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^3+8}$

iv. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2}$

v. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2}$

vi. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x^{10}+x+3}$

vii. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{x}{x^2+1}-\frac{5}{x+2})$

viii. $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{x^2+5}{x}-\frac{x^2+3}{x+2})$

Λύση

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3+2x-5)=$

$$\lim\limits_{x\to+\infty}(-10x^3)=-10\lim\limits_{x\to+\infty}x^3=-\infty$$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3-2x+1)=$

$$\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^3)=5\lim\limits_{x\to-\infty}x^3=-\infty$$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^3+8}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x^3}=5\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3}=5\cdot0=0$

iv) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4-5x^3+2x-1}{x^3-3x+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^4}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} x \ = +\infty$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3+x-1}{4x^3-x^2+2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^3}{4x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

vi) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{x^{10}+x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^{10}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^9} = 0$

Πρώτη σκέψη: Αν δοκιμάσουμε να *σπάσουμε το όριο* θα οδηγηθούμε σε απροσδιόριστη μορφή.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3}{x+2}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{x}\right) = -\infty$$

Άρα το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2}\right)$ καταλήγει στην απροσδιόριστη μορφή $(-\infty)-(-\infty)$.

vii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2+3} - \frac{x^2+3}{x^3+2}\right) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{x^2+3}\right) - \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^3+2}\right) = 0 - 0 = 0$

viii) Κάνουμε τις πράξεις και έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+5}{x} - \frac{x^2+3}{x+2}\right) = \lim_{x\to-\infty} \frac{(x^2+5)(x+2)-x(x^2+3)}{x(x+2)} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+2x^2+5x+10-x^3-3x}{x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+2x+10}{x^2+2x} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} 2 = 2$$

Άσκηση 2 σελ. 69

Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)$

iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right), \alpha\neq\beta$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$.

Λύση

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2-2x+3)=\lim\limits_{x\to+\infty}(4x^2)=+\infty$ άρα

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{4x^2-2x+3}=+\infty$$

ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2+10x+9}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{10x}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{10x}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}$$

Όμως $\lim\limits_{x\to-\infty}|x|=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{10x}{x}+\frac{9}{x^2}\right)=1+0+0=1$

Άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{10x}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}|x|\sqrt{\left(1+\frac{10x}{x}+\frac{9}{x^2}\right)}=+\infty$

iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\right)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-3x+2)=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-3x+2}=+\infty$

Επομένως:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-3x+2}\right)=(+\infty)+(+\infty)=+\infty$$

iv) $\lim_{x\to-\infty}(x+\alpha)(x+\beta)=\lim_{x\to-\infty}(x^2+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta)=\lim_{x\to-\infty}x^2=$ $+\infty$

άρα $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}\right)=+\infty$ και $\lim_{x\to-\infty}(x)=-\infty$.

Επομένως : $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)}-x\right)=(+\infty)-(-\infty)=+\infty$.

v) $\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{x^2\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-|x|\sqrt{\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)=$$

Αλλά $x\to+\infty$ επομένως $x>0$ άρα $|x|=x$ το έτσι το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-|x|\sqrt{\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2x-1-x\sqrt{\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)$$

Αλλά :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}-\sqrt{\left(4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)=2-0-\sqrt{(4-0+0)}=0$$

ενώ $\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1}{x}-\sqrt{\left(1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right)}\right)=0\cdot(+\infty)$

Δηλαδή καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή .

Έστω $f(x)=\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)$

Πολλαπλασιάζουμε και διαιρούμε με τη συζυγή παράσταση και έχουμε διαδοχικά :

$f(x)=(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}=$

$\frac{\left(2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3}\right)\left(2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}\right)}{2x-1+\sqrt{4x^2-4x+3}}$

άρα

$f(x)=\frac{(2x-1)^2-\left(\sqrt{4x^2-4x+3}\right)^2}{2x-1+\sqrt{x^2\ (4--\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2})=}}$ και $f(x)=\frac{4x^2-4x+1-(4x^2-4x+3)}{2x-1+|x|\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}$

Αλλά $x\to+\infty$ επομένως $x>0$ άρα $|x|=x$ το έτσι

$f(x)=\frac{4x^2-4x+1-4x^2+4x-3}{2x-1+x\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=\frac{-2}{x\left(2-\frac{1}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}$

Οπότε $f(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{-2}{\left(2-\frac{1}{x}+\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right)}$

Επειδή τα επιμέρους όρια υπάρχουν : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^2}=0$ εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων έχουμε,

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{-2}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)+\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{4-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}}=0\cdot\frac{-2}{2+2}=0$

Άσκηση 3 β′ ομάδας σελ. 69

Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ iv) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+x)$

v) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ vi) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2)$

Λύση

Όταν, $x\to+\infty$ περιοριζόμαστε σε διάστημα της μορφής $(\alpha,\ +\infty)$.

Επίσης επειδή $x>0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=x$, ενώ όταν, $x\to-\infty$ περιοριζόμαστε σε διάστημα της μορφής $(-\infty,\beta)$.

$Επίσης\ επειδή\ x>0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=x$

i) Πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$: $\mathbb{R}^*$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,+\infty)$.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\frac{|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x}\overset{|x|=x}{=}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=\sqrt{1+0}=1$

ii) Πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ $είναι\ το\ \mathbb{R}$.

Περιοριζόμαστε όμως στο $(0,+\infty)$.

$$f(x)=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}-x)}{\sqrt{x^2+1}+x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=$$

$$=\frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

iii) Πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ *είναι το* $\mathbb{R}^*$.

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,0)$.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x}=\frac{|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x}\overset{|x|=-x}{=}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x}=-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$$

Οπότε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}=-\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}=-\sqrt{1+0}=-1$

iv) Πεδίο ορισμού της $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ *είναι το* $\mathbb{R}$.

Περιοριζόμαστε όμως στο $(-\infty,0)$.

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-x}=$$

$$=\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=-\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0$$

ν) Πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$ είναι το : $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

αλλά περιοριζόμαστε στο $(1,+\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x-x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}{\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}=\frac{0}{0}$$ καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(1,+\infty)$.

$$f(x)=\frac{(x-\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2-1})}{(x-\sqrt{x^2-1})(x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2-1})}=$$

$$\frac{[x^2-(\sqrt{x^2+1})^2](x+\sqrt{x^2-1})}{[x^2-(\sqrt{x^2-1})^2](x+\sqrt{x^2+1})}$$

$$=\frac{[x^2-x^2-1](x+\sqrt{x^2-1})}{[x^2-x^2+1](x+\sqrt{x^2+1})}=-\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2+1}}=-\frac{x+\sqrt{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}}{x+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$=-\frac{x+x\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\frac{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}{x\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}=-\frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1+\sqrt{1-0}}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{2}{2}=-1$$

ν) Πεδίο ορισμού της $f(x)=x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2$ είναι το $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x^2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2}\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}-x^2\right)=$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(x|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x^2\right)\overset{|x|=x}{=}\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-x^2\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)\right)$$

Επειδή τα επιμέρους όρια υπάρχουν : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2} = 0$ εφαρμόζοντας τις ιδιότητες των ορίων έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x^2\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}-1\right)\right)=\ldots(=+\infty)\cdot 0$$

Δηλαδή καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή .

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2$

και περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0,+\infty)$.

$$f(x) = x\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)$$

Η συζυγής παράσταση της $\sqrt{x^2+2x+2}-x$ είναι η $\sqrt{x^2+2x+2}+x$

$$f(x) = x\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)$$

$$= x\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}-x\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=$$

$$x\frac{\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)^2-(x)^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=x\frac{x^2+2x+2-x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}=x\frac{2x+2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x}$$

(επειδή $x \to +\infty$ έχουμε $|x| = x$)

$$\overset{|x|=x}{=} x\frac{2x+2}{x\sqrt{\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}+x} = \frac{x\left(2+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1} = x\frac{\left(2+\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1}$$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1} = \frac{2+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = 1$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\sqrt{x^2+2x+2}-x^2\right) = +\infty$

καταλήγουμε σε απροσδιόριστη μορφή.

Επιχειρώντας τη μέθοδο που περιγράψαμε έχουμε διαδοχικά

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+\sqrt{9x^2+7}-5x-2\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)+\left(\sqrt{9x^2+7}-3x\right)-2\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}-2x\right)\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x\right)}{\left(\sqrt{4x^2+2x+1}+2x\right)} + \frac{\left(\sqrt{9x^2+7}-3x\right)\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)}{\left(\sqrt{9x^2+7}+3x\right)}-2\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x^2+2x+1-4x^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}+\frac{9x^2+7-9x^2}{\sqrt{9x^2+7}+3x}-2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+1}+2x}+\frac{7}{\sqrt{9x^2+7}+3x}-2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^2\left(4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+2x}+\frac{7}{\sqrt{x^2\left(9+\frac{7}{x^2}\right)}+3x}-2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+1}{|x|\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}+\frac{7}{|x|\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+3x}-2\right)$$

$$\overset{|x|=x}{=} \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x\left(2+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2x}+\frac{7}{x\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+3x}-2\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{4+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+2}+\frac{1}{x}\frac{7}{\left(\sqrt{9+\frac{7}{x^2}}+3\right)}-2\right)$$

$$\overset{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0}{=}\left(\frac{2}{\sqrt{4}+2}+0\frac{7}{(\sqrt{9}+3)}-2\right)=\frac{1}{2}-2=-\frac{3}{2}$$

Άσκηση 4 σελ. 69

Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$ ii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x^2-x|}{x-1}$

Λύση

i) Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-5x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$

ισχύει ότι $x^2-5x>0$ άρα

$$|x^2-5x|=x^2-5x$$

Επομένως το όριο γράφεταιQ

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-5x+x}{x^2-3x+2}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-4x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$.

Για κάθε $x<0$ είναι $x+\sqrt{4+3x^2}>x+\sqrt{x^2}=x+|x|\neq 0$.

Περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,0)$, οπότε :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2\left(x+\frac{1}{x^2}\right)}+x\left(\frac{5}{x}-1\right)}{x+\sqrt{x^2\left(\frac{4}{x^2}+3\right)}}=\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+x\left(\frac{5}{x}-1\right)}{x-x\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}}=$$

$$=\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\left(\frac{5}{x}-1\right)}{1-\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\left(\frac{5}{x}-1\right)}{1-\sqrt{\frac{4}{x^2}+3}}=\frac{-\sqrt{1+\frac{1}{0}}+(\frac{5}{0}-1)}{1-\sqrt{\frac{4}{0}+3}}=\sqrt{3}+1$$

Το πεδίο ορισμού της $f(x)=\frac{|x^2-x|}{x-1}$ είναι το $\mathbb{R}-\{1\}$.

Επειδή $x^2-x>0 \Leftrightarrow x<0$ ή $x>1$. Περιοριζόμαστε στο $(1,+\infty)$.

Επειδή : $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ ισχύει ότι $x^2-x>0$ άρα $|x^2-x|=x^2-x$.

Επομένως το όριο γράφεται $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|x^2-x|}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x}=$ $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

Β΄ Ομάδα

Άσκηση 1 β΄ ομάδας σελ. 69

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ, να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$i)$ $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+1}+\mu x)$

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}$

Λύση

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\mu x$ με πεδίο ορισμού $D_f=\mathbb{R}$.

Επειδή $x\to-\infty$ περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-\infty,\ 0)$. Επειδή $x<0\Rightarrow\sqrt{x^2}=|x|=-x$ έχουμε διαδοχικά

$$f(x)=\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\mu x=-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\mu x=-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right)$$

(1)

Είναι : $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right)=\sqrt{1+0}-\mu$ $=1-\mu$

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\mu\right)\right]=(+\infty)\cdot(1-\mu)$

- Όταν $1-\mu<0$, δηλαδή $\mu>1$, από την (1) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

- Όταν $1-\mu>0$, δηλαδή $\mu<1$, από την (1) έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

- Όταν $1-\mu=0$, δηλαδή $\mu=1$, έχουμε διαδοχικά

$$f(x)=\sqrt{(x^2+1)}+x=\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}-x}=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}-x}=$$

$$\frac{1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-x}=-\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}.$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1}=0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=0$

ii) Επειδή $x\to+\infty$ περιοριζόμαστε στο διάστημα $(x_1,+\infty)$, όπου x_1 η μεγαλύτερη ρίζα του παρονομαστή μx^2-5x+6 που ενδεχομένως υπάρχει.

- Όταν $\mu-1\neq0$ και $\mu\neq0$, δηλαδή όταν $\mu\neq1$ και $\mu\neq0$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3+2x^2+3}{\mu x^2-5x+6}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)x^3}{\mu x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\mu-1)}{\mu x^2}x$$

Οπότε αν $\frac{\mu-1}{\mu}>0$, δηλαδή $\mu<0$ ή $\mu>1$, τότε

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

ενώ αν $\frac{\mu-1}{\mu}<0$, δηλαδή $0<\mu<1$, τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

- Όταν $\mu-1=0$ δηλαδή $\mu=1$, η συνάρτηση γίνεται

$f(x)=\frac{2x^2+3}{x^2-5x+6}$. Οπότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty} 2=2$

- Όταν μ = 0 , η συνάρτηση γίνεται $f(x) = \frac{-x^3+2x^2+3}{-5x+6}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^3}{-5x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5}x^2 = +\infty$$

Άσκηση 2 β΄ ομάδας σελ. 69

Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \Re$, ώστε το $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+5x+10}-\lambda x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2+5x+10} - \lambda x$ και περιοριζόμαστε στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Επειδή $x > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2} = |x| = x$

έχουμε διαδοχικά $f(x) = \sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}\right)} - \lambda x =$

$$x \cdot \sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}} - \lambda x = x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}} - \lambda\right)$$

αλλά $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}} - \lambda\right) = \sqrt{1+0+0} - \lambda = 1 - \lambda$$

άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}} - \lambda\right)\right] = (+\infty)\cdot(1-\lambda)$

- Όταν $1 - \lambda > 0$, δηλαδή $\lambda < 1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- Όταν $1 - \lambda < 0$, δηλαδή $\lambda > 1$, τότε $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

- Όταν $1 - \lambda = 0$, δηλαδή $\lambda = 1$, τότε έχουμε διαδοχικά

$$f(x)=\sqrt{x^2+5x+10} - x = \frac{(\sqrt{x^2+5x+10}-x)(\sqrt{x^2+5x+10}+x)}{\sqrt{x^2+5x+10}+x}$$

$$= \frac{x^2+5x+10-x^2}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}\right)}+x} = \frac{5x+10}{x\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+x} = \frac{x\left(5+\frac{10}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1\right)} = \frac{5+\frac{10}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x}+\frac{10}{x^2}}+1}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)= \frac{5+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{5}{2}$

Επομένως, η ζητούμενη τιμή του λ είναι $\lambda = 1$.

Άσκηση 3 β΄ ομάδας σελ. 69

Αν $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - \alpha x + \beta$, να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \Re$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$

Επειδή $x \to +\infty$ περιοριζόμαστε στο διάστημα $(-1, +\infty)$.

$$f(x)=\frac{x^2+1-\alpha x^2-\alpha x+\beta x+\beta}{x+1} = \frac{(1-\alpha)x^2+(\beta-\alpha)x+\beta+1}{x+1} \quad \textbf{(1)}$$

$$= \frac{x^2\left(1-\alpha+\frac{\beta-\alpha}{x}+\frac{\beta+1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = x \cdot \frac{1-\alpha+\frac{\beta-\alpha}{x}+\frac{\beta+1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$$

- Όταν $1 - \alpha \neq 0$, δηλαδή όταν $\alpha \neq 1$ και επειδή

$$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\alpha+\frac{\beta-\alpha}{x}+\frac{\beta+1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1-\alpha+0+0}{1+0} = 1 - \alpha$

θα έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$ ανάλογα με το πρόσημο του $1 - \alpha$

- Όταν $1 - \alpha = 0$, δηλαδή όταν $\alpha = 1$, η συνάρτηση από την (1) γίνεται

$$f(x) = \frac{(\beta-1)x+\beta+1}{x+1} = \frac{x\left(\beta-1+\frac{\beta+1}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\beta-1+\frac{\beta+1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\beta-1+\frac{\beta+1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \dfrac{\beta-1+0}{1+0} = \beta - 1$

Αλλά $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Επομένως $\beta - 1 = 0 \Leftrightarrow \beta = 1$

Οι ζητούμενες, λοιπόν, τιμές των α, β είναι $\alpha = 1$, $\beta = 1$.