1.6 ΜΗ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_o \in \mathbb{R}$

Α Ομάδας

Άσκηση 1 σελ. 63

Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_o όταν :

i. $f(x) = \frac{x+5}{x^4+3x^2}$, $x_o = 0$

ii. $f(x) = \frac{2x-3}{4(x-1)^4}$, $x_o = 1$

iii. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}$, $x_o = 0$

Λύση

i) Για κάθε x κοντά στο 0 είναι : $f(x) = (x+5) \cdot \frac{1}{x^4+3x^2}$.

Είναι : $\lim\limits_{x \to 0}(x+5) = 0+5 = 5 > 0$ **(1)**

$\lim\limits_{x \to 0}(x^4+3x^2) = 0$ με $x^4+3x^2 > 0$ κοντά στο $x_o = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^4+3x^2} = +\infty \qquad \textbf{(2)}$$

$(1),(2) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

ii) Για κάθε x κοντά στο 1 είναι : $f(x) = (2x-3) \cdot \frac{1}{4(x-1)^4}$.

Είναι : $\lim\limits_{x \to 1}(2x-3) = 2-3 = -1 < 0$ **(1)**

$\lim\limits_{x \to 1} 4(x-1)^4 = 0$ με $4(x-1)^4 > 0$ κοντά στο $x_o = 1 \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{4(x-1)^4} = +\infty \qquad \textbf{(2)}$$

$(1),(2) \Rightarrow \lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

iii)

Για $x > 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0 \implies \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 \quad \mathbf{(1)}$

Για $x < 0$ είναι $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \implies \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \quad \mathbf{(2)}$

Από $(1),(2) \implies$ δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

Άσκηση 2 σελ. 63

Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_o όταν :

i) $f(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{4}{1-x^2}, \quad x_0 = 1$

ii) $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x|x|}, \quad x_0 = 0$

iii) $f(x) = x^2\left(1 + \frac{1}{x^3}\right), \ x_0 = 0$

Λύση

i. Για κάθε x κοντά στο 1 είναι :

$$f(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{4}{(1-x)(1+x)} = \frac{3(1+x)-4}{(1-x)(1+x)} = \frac{3+3x-4}{(1-x)(1+x)}$$
$$= \frac{3x-1}{1+x} - \frac{1}{1-x}$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{3x-1}{1+x} = 2 > 0 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 1^+}(1-x) = 0 \quad \mu\varepsilon\ 1-x<0 \implies \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{1-x} = -\infty \qquad (2)$$

Από $(1),(2) \implies \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$. Όμοια, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

Αφού $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ το όριο της $f(x)$ στο 1 δεν υπάρχει.

ii. Για $x > 0$ είναι : $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{xx} = (x^2+3x-2)\cdot\frac{1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2+3x-2) = -2 < 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ (1)

Για $x < 0$ είναι : $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x(-x)} = \frac{-x^2-3x+2}{x^2} = (-x^2-3x+2)\cdot\frac{1}{x^2}$.

$\lim\limits_{x\to 0^-}(-x^2-3x+2) = 2 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x^2} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ (2)

Από (1) *και* (2) δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

iii.

Για κάθε x κοντά στο 0 είναι : $f(x) = x^2 + \frac{1}{x} = \frac{x^3+1}{x} = (x^3+1)\cdot\frac{1}{x}$.

Είναι :

$\operatorname{Lim}\limits_{x\to o^+}(x^3+1) = 1 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3+1) = 1 > 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$

Άρα, δεν υπάρχει το όριο της f στο 0.

Β' Ομάδα

Άσκηση 1 σελ. 64

Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim\limits_{x\to 4} -\frac{9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$.

Λύση

$x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8 = \sqrt{x}(x-4) - 2(x-4) = (x-4)(\sqrt{x}-2)$

$$\lim_{x\to 4} -\frac{9}{x\sqrt{x}-2x-4\sqrt{x}+8}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{-9}{(x-4)(\sqrt{x}-2)} \quad =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{-9}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-2)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{-9}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{-9}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2}$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{-9}{\sqrt{x}+2} = -\frac{9}{4} < 0$$

$$\lim_{x\to 4} (\sqrt{x}-2)^2 = 0 \quad \mu\varepsilon\ (\sqrt{x}-2)^2 > 0$$

$$\lim_{x\to 4} \frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2} = +\infty$$

Άρα : $\lim_{x\to 4} f(x) = -\infty.$

Άσκηση 3 σελ. 64

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$ και $g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}$.

Να βρείτε τις τιμές των $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ για τις οποίες υπάρχουν στο $\mathbb{R}$ τα όρια $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 0}g(x)$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τα παραπάνω όρια.

Λύση

Έστω $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=l\in\mathbb{R}$.

Κοντά στο 1 είναι $f(x)=\frac{(\lambda-1)x^2+x-2}{x^2-1}$.

$f(x)(x^2-1)=(\lambda-1)x^2+x-2$

$\lim\limits_{x\to 1}[f(x)(x^2-1)]=\lim\limits_{x\to 1}[(\lambda-1)x^2+x-2]$

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)=(\lambda-1)1^2+1-2$

$l\cdot 0=\lambda-1+1-2$

$0=\lambda-2\Longrightarrow\lambda=2$

Για $\lambda=2$ έχουμε :

$$f(x)=\frac{(2-1)x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{x^2+x-2}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\frac{x+2}{x+1}$$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

Έστω : $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=l\in\mathbb{R}$.

Κοντά στο 0 είναι :

$$g(x)=\frac{x^2+2x+\mu}{x}$$

$$g(x)\cdot x=x^2+2x+\mu$$

$$\lim_{x\to 0} g(x)\cdot \lim_{x\to 0} x=0^2+2\cdot 0+\mu$$

$$l\cdot 0=\mu \Longrightarrow \mu=0$$

Για $\mu=0$ έχουμε : $g(x)=\frac{x^2+2x}{x}=x+2.$

$$\lim_{x\longrightarrow 0} g(x)=\lim_{x\longrightarrow 0}(x+2)=0+2=2$$

Άσκηση 4 σελ. 64

Να βρείτε τα $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, όταν :

i) $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\frac{x-4}{f(x)}=+\infty$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x+2}=-\infty$ iii) $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)(3x^2-2)]=+\infty$

Λύση

i) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{x-4}{f(x)}$ κοντά στο 1.

Τότε : $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$ και $g(x)f(x)=x-4 \Longrightarrow$

$g(x)>0$ κοντά στο 1 και $f(x)=\frac{x-4}{g(x)}=(x-4)\cdot\frac{1}{g(x)}$ (1)

$\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\frac{1}{g(x)}=0$. Επίσης, $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}(x-4)=1-4=-3.$

Από η (1) $\Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x)=-3\cdot 0=0.$

ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{x+2}$ κοντά στο 1.

Τότε $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = -\infty$ και $h(x)(x+2) = f(x)$ (2)

και επειδή $\lim\limits_{x\to 1}(x+2) = 1+2-3 > 0$

$(2) \Longrightarrow \lim\limits_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow 1}[h(x)(x+2)] = -\infty.$

iii) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\omega(x) = f(x)(3x^2-2)$ κοντά στο 1. (3)

Τότε : $\lim\limits_{x\to 1}\omega(x) = +\infty.$

Είναι : $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2) = 1 \neq 0 \Longrightarrow 3x^2-2 \neq 0$ κοντά στο 1 και

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{3x^2-2} = 1 > 0$$

$$(3) \Longrightarrow f(x) = \frac{\omega(x)}{3x^2-2} = \omega(x)\cdot\frac{1}{3x^2-2} \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1} f(x) = \lim_{x\longrightarrow 1}\left[\omega(x)\cdot\frac{1}{3x^2-1}\right] = +\infty$$