1.5 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΩΝ ΟΡΙΩΝ

Α Ομάδας

Άσκηση 3 σελ. 56

Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4-16}{x^3-8}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+3)^3-27}{x}$

Λύση

i. $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^4-16}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{(x-2)(x^2+2x+4)} =$
$\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x+2)(x^2+4)}{x^2+2x+4} = \frac{(2+2)(4+4)}{4+4+4} = \frac{8}{3}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(2x^2-3x+1)}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(2x-1)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{2x-1}{x+1} =$
$-\frac{1}{1} = -1$

iii. $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x^2-1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)}{x(x^2-1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2(x-1)}{x(x-1)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}.$

iv. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+3)^3-27}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(x+3-3)[(x+3)^2+3(x+3)+9]}{x} =$
$\lim\limits_{x\to 0} [(x+3)^2+3(x+3)+9] = 3^2+3(0+3)+9 = 27$

Άσκηση 4 σελ. 57

Να βρείτε τα όρια :

$i)\ \lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ iii) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}$

iv) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$ v) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}$

Λύση

i. $\lim\limits_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}=\frac{3-\sqrt{9}}{9-9}=\frac{0}{0}$ *απροσδιοριστία*

$$\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{9-x}=\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{3^2-\sqrt{x}^2}=\lim_{x\to 9}\frac{3-\sqrt{x}}{(3-\sqrt{x})(3+\sqrt{x})}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{3+\sqrt{x}}=\frac{1}{6}$$

ii. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\sqrt{1-x^2})(1+\sqrt{1-x^2})}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-x^2)}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(1+\sqrt{1-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{2}$$

iii. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x+2}+2)}=$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}^2-2^2}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(\sqrt{x+2}+2)}=$$

$$\frac{\sqrt{2^2+5}+3}{(2+2)(\sqrt{2+2}+2)}=\frac{3}{8}$$

iv. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(x-1)(x-4)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)}=$

$\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)}{(x-1)(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{1}{(x-1)(\sqrt{x}+2)}=\frac{1}{(4-1)(\sqrt{4}+2)}=\frac{1}{12}$

Άσκηση 6 σελ. 57

Να βρείτε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi x}{x}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}$

iv) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{x-\eta\mu x}{x})$ v) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\eta\mu x}{x^3+x})$ vi) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}$

Λύση

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1$

i)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(3\frac{\eta\mu 3x}{3x})=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu 3x}{3x}\overset{*}{=}3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu u}{u}=3.1=3$

∗Θέσαμε $3x=u$, οπότε $u\to 0$

$\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$

ii)

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varepsilon\phi x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}\right)$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}.\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

$=1.\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0}=\frac{1}{1}=1$

iii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\varepsilon\varphi 4x}{x}}{\frac{\eta\mu 2x}{x}}=\frac{\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{x}}{\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}} \quad (1)$$

Αλλά $\lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu 4x}{x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{x}.\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 4x}$$

$$=4\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 4x}{4x}\cdot\frac{1}{1}=4\cdot 1\cdot 1=4$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 2x}{2x}=2\cdot 1=2$$

$$(1)\ \Rightarrow\ \lim_{x\to 0}\frac{\varepsilon\varphi 4x}{\eta\mu 2x}=\frac{4}{2}=2$$

iv)

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1-\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1-1=0$$

v)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x^3+x}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x(x^2+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+1}=1\cdot\frac{1}{0^2+1}=1$$

vi)

Πολλαπλασιάσαμε με την συζυγή παράσταση

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{\sqrt{5x+4}-2}=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x\,(\sqrt{5x+4}+2)}{(\sqrt{5x+4}-2)(\sqrt{5x+4}+2)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x\,(\sqrt{5x+4}+2)}{5x+4-4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{5x}.\ \lim_{x\to 0}(\sqrt{5x+4}+2)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu 5x}{5x}\cdot(\sqrt{5\cdot 0+4}+2)=1\cdot(2+2)=4$$

Άσκηση 8 σελ. 57

Να βρείτε το $\lim_{x \to 0} f(x)$, αν :

i. $1 - x^2 \leq f(x) \leq 1 + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. $1 - x^4 \leq f(x) \leq \frac{1}{συν^2 x}$ για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Λύση

Κριτήριο Παρεμβολής

> Έστω οι συναρτήσεις f, g, h. Αν
>
> - $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
> - $\lim_{x \to x_0} h(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$,
>
> τότε
>
> $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell.$$

i. $\lim_{x \to 0} (1 - x^2) = 1$ και $\lim_{x \to 0} (1 + x^2) = 1$ άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

ii. $\lim_{x \to 0} (1 - x^4) = 1$ και $\lim_{x \to 0} \frac{1}{συν^2 x} = \frac{1}{1} = 1$ άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$

Άσκηση 9 σελ. 57

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2\alpha x + \beta, & x \leq 3 \\ \alpha x + 3\beta, & x > 3 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 10$.

Λύση

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell, \text{ αν και μόνο αν } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) = 10 \Leftrightarrow \lim_{x \to 3^-} f(x) = 10 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 3^+} f(x) = 10 \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to 3^-} (2\alpha x + \beta) = 10 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 3^-} (\alpha x + 3\beta) = 10 \Leftrightarrow$$

$$6\alpha + \beta = 10 \quad \kappa\alpha\iota \quad 3\alpha + 3\beta = 10 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 10 - 6\alpha \quad \kappa\alpha\iota \quad 3\alpha + 3(10 - 6\alpha) = 10 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 10 - 6\alpha \quad \kappa\alpha\iota \quad 3\alpha + 30 - 18\alpha = 10 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 10 - 6\alpha \quad \kappa\alpha\iota \quad -15\alpha = -20 \Leftrightarrow$$

$$\beta = 10 - 6\alpha \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\beta = 10 - 6 \cdot \frac{4}{3} \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha = \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\beta = 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha = \frac{4}{3}$$

Β΄ Ομάδας

Άσκηση 4 σελ. 58

Να βρείτε το $\lim_{x\to 1} f(x)$, αν :

i) $\lim_{x\to 1}(4f(x)+2-4x)=-10$ ii) $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=1$

Λύση

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = 4f(x) + 2 - 4x,\ \ x\ \textit{κοντά στο}\ 1$$

Θέτουμε g(x) την ποσότητα που βρίσκεται μέσα στο όριο

$$g(x) - 2 + 4x = 4f(x) \Leftrightarrow$$

$$f(x) = \frac{1}{4}(g(x) - 2 + 4x)$$

Λύνουμε ως προς f(x)

Η υπόθεση γίνεται $\lim_{x\to 1} g(x) = -10$

Επομένως $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{4}\lim_{x\to 1}(g(x) - 2 + 4x) =$

$$\frac{1}{4}\cdot(-10 - 2 + 4\cdot 1) = \frac{1}{4}\cdot(-8) = -2$$

ii. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x-1}$, x *κοντά στο* 1

$$f(x) = g(x)(x-1)$$

Η υπόθεση γίνεται $\lim_{x\to} g(x) = 1.$

Επομένως $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}[g(x)(x-1)]$

$$= \lim_{x\to 1} g(x)\cdot\lim_{x\to 1}(x-1)] = 1\cdot(1-1) = 0$$