Α' Ομάδα- όλες

Άσκηση 1 σελ. 38

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες.

i. $f(x) = \sqrt{1-x}$

ii. $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$

iii. $f(x) = 3e^{1-x} + 1$

iv. $f(x) = (x-1)^2 - 1, x \leq 1$

Λύση

i. Πρέπει : $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -1 \Leftrightarrow x \leq 1$.

Οπότε το πεδίο ορισμού είναι : $D_f = (-\infty, 1]$.

Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$. Είναι :

$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-x_2}$

$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Πρέπει $x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2$.

Οπότε το πεδίο ορισμού είναι : $D_f = (2, +\infty)$.

Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$. Είναι :

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2) \Rightarrow$

$2\ln(x_1 - 2) < 2\ln(x_2 - 2) \Rightarrow 2\ln(x_1 - 2) - 1 < 2\ln(x_2 - 2) - 1$

$\Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Άρα, η f είναι γνησίως αύξουσα.

iii. $D_f = \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$. Είναι :

$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow 1 - x_1 > 1 - x_2 \Rightarrow e^{1-x_1} > e^{1-x_2} \Rightarrow$

$3e^{1-x_1} > 3e^{1-x_2} \Longrightarrow 3e^{1-x_1} + 1 > 3e^{1-x_2} + 1 \Longrightarrow$

$f(x_1) > f(x_2)$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα.

iv. Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2 \leq 1$. Είναι :

$x_1 - 1 < x_2 - 1 \leq 0 \Longrightarrow (x_1 - 1)^2 > (x_2 - 1)^2 \Longrightarrow$

$(x_1 - 1)^2 - 1 > (x_2 - 1)^2 - 1 \Longrightarrow$

$f(x_1) > f(x_2)$. Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$.

Άσκηση 2 σελ. 38

Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και για καθεμία από αυτές να βρείτε την αντίστροφή της. $f(x) = 3x - 2$

i. $f(x) = x^2 + 1$

ii. $f(x) = (x-1)(x-2) + 1$

iii. $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$

iv. $f(x) = \ln(1-x)$

v. $f(x) = e^{-x} + 1$

vi. $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

vii. $f(x) = |x - 1|$

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$$y = 3x - 2 \Leftrightarrow y + 2 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{y+2}{3} \quad (1)$$

Βλέπουμε ότι για τιμή του $y \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $\frac{y+2}{3}$. Άρα η συνάρτηση f είναι «$1-1$» και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

Από την (1) έχουμε $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}$.

Δηλαδή , $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.. Θεωρούμε 2 τιμές διαφορετικές μεταξύ τους. Για $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$ είναι :

$f(x_1) = (-1)^2 + 1 = 2$ και $f(x_2) = 1^2 + 1 = 2$.

Δηλαδή, $x_1 \neq x_2$ ενώ $f(x_1) = f(x_2)$. Άρα, η συνάρτηση δεν είναι $1 - 1$. Οπότε, δεν έχει και αντίστροφη συνάρτηση.

iii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$.. Θεωρούμε 2 τιμές διαφορετικές μεταξύ τους. Για $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$ είναι :

$f(x_1) = (1-1)(1-2) + 1 = 1$ και

$f(x_2) = (2-1)(2-2) + 1 = 1$.

Δηλαδή, $x_1 \neq x_2$ ενώ $f(x_1) = f(x_2)$. Άρα, η συνάρτηση δεν είναι $1 - 1$. Οπότε, δεν έχει και αντίστροφη συνάρτηση.

iv. Πρέπει $1 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$. Άρα, $D_f = (-\infty, 1]$.

Θεωρούμε την $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$y = \sqrt[3]{1-x}$ για να έχουμε λύση πρέπει $y \geq 0$ τότε έχουμε :

$y^3 = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - y^3 \quad (1)$

Αλλά, $x \leq 1 \Leftrightarrow 1 - y^3 \leq 1 \Leftrightarrow -y^3 \leq 0 \Leftrightarrow y \geq 0$.

Άρα, το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το $[0, +\infty)$.

Για κάθε τιμή του $y \geq 0$ η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση την $1 - y^3$. Άρα, η συνάρτηση είναι «$1 - 1$».

Από την (1) έχουμε $f^{-1}(y) = 1 - y^3$.

Άρα, $f^{-1}(x) = 1 - x^3$ με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$.

v. Πρέπει $1 - x > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Άρα, $D_f = (-\infty, 1)$. Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$y = \ln(1 - x) \Leftrightarrow e^y = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - e^y$ $\quad(\mathbf{1})$

Αλλά, $x < 1 \Leftrightarrow 1 - e^y < 1 \Leftrightarrow -e^y < 0$ που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Άρα, η συνάρτηση είναι «1-1». Από την (1) έχουμε:

$f^{-1}(x) = 1 - e^x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$

vi. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$. Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$$y = e^{-x} + 1 \Leftrightarrow y - 1 = e^{-x} \Leftrightarrow$$

$$-x = \ln(y - 1)\ \mu\varepsilon\ \ y - 1 > 0$$

$$x = -\ln(y - 1)\ \ \mu\varepsilon\ y > 1 \quad (\mathbf{1})$$

Δηλαδή, για κάθε τιμή του $y \in (1, +\infty)$, η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση την $-\ln(y - 1)$. Άρα, η συνάρτηση f είναι $1 - 1$ και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(1, +\infty)$.

Από την (1) προκύπτει ότι: $f^{-1}(y) = -\ln(y - 1)$, $y > 1$.

Δηλαδή, $f^{-1}(x) = -\ln(x - 1)$ με πεδίο ορισμού το $(1, +\infty)$.

vii.

$D_f = \mathbb{R}$

Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x.

$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \Leftrightarrow e^x - 1 = y(e^x + 1) \Leftrightarrow e^x - 1 = ye^x + y \ \Leftrightarrow$

$e^x - ye^x = y + 1 \Leftrightarrow (1 - y)e^x = y + 1 \Leftrightarrow$

$e^x = \dfrac{y+1}{1-y}, 1 - y \neq 0 \Leftrightarrow$

$x = \ln\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right), \dfrac{1+y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right), (1+y)(1-y) > 0$
$\Leftrightarrow$

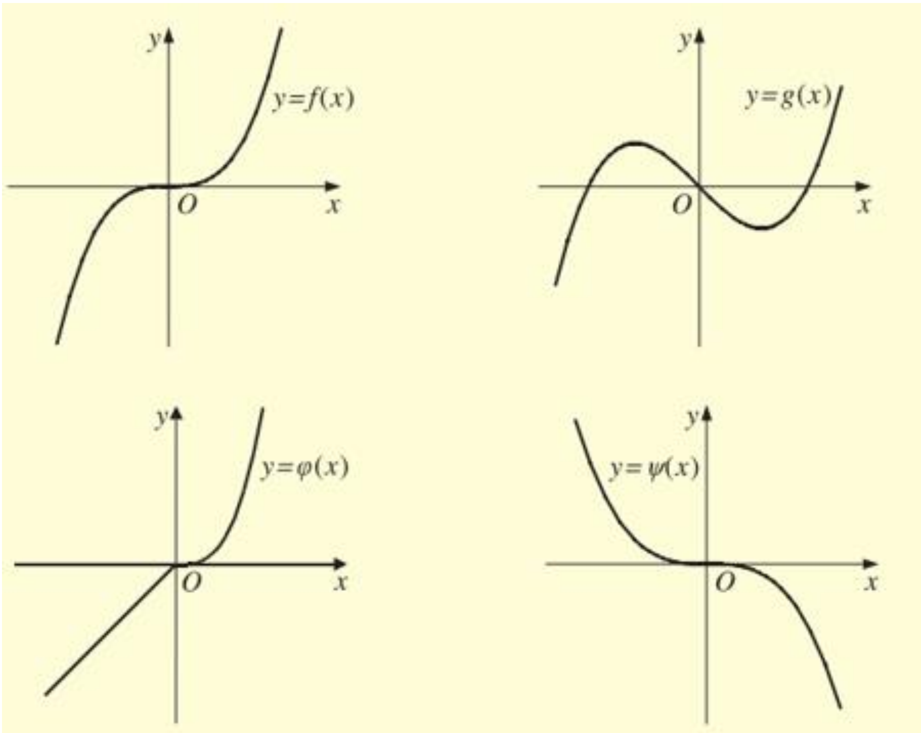
$x = \ln\left(\dfrac{y+1}{1-y}\right), \qquad -1 < y < 1 \qquad (\mathbf{1})$

Βλέπουμε ότι για κάθε τιμή του $y \in (-1,1)$, η εξίσωση y= $f(x)$ έχει μοναδική λύση την $\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. Άρα, η συνάρτηση f είναι «$1-1$» και έχει σύνολο τιμών το διάστημα $(-1,1)$.

Από την (1) έχουμε $f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right), -1 < y < 1$ ή $f^{-1}(x) = \ln(\frac{1+x}{1-x})$ με πεδίο ορισμού το $(-1,1)$.

Άσκηση 3 σελ. 38

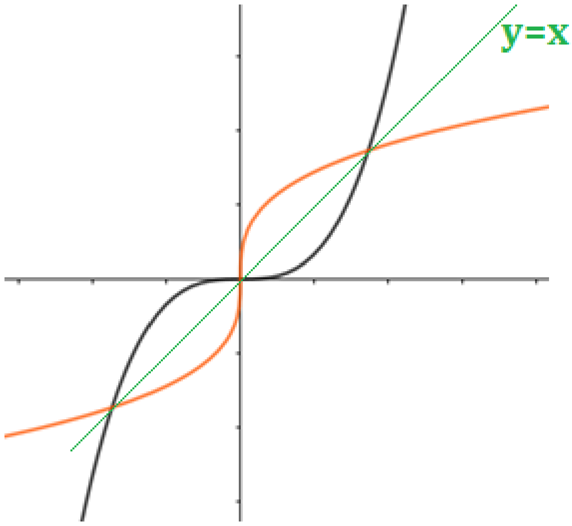
Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g, φ *και* ψ.



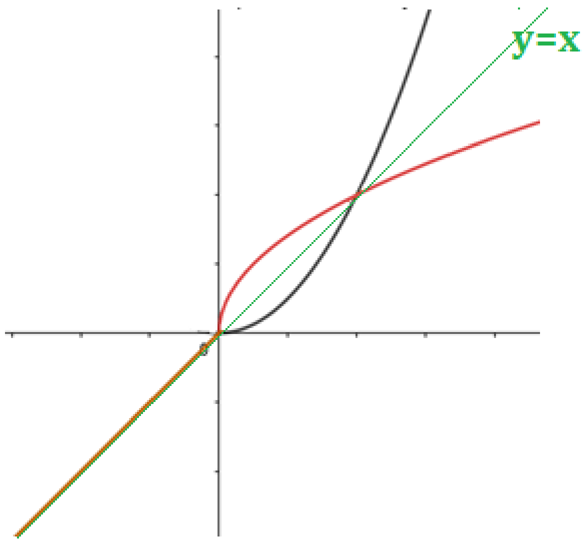
Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f, g, φ, ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ΄ αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

Λύση

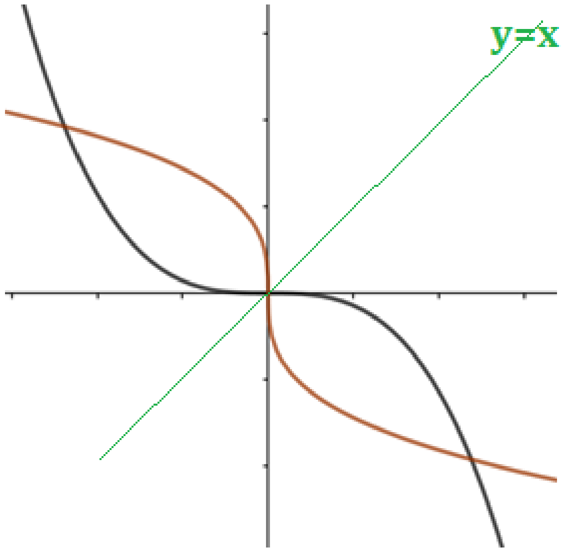
$y = f(x)$:



$y = \varphi(x)$



$y = \psi(x)$



Αν φέρουμε οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ τέμνει τις γραφικές παραστάσεις των f, φ, ψ το πολύ σε ένα σημείο. Άρα, οι συναρτήσεις f, φ, ψ είναι «$1-1$» και επομένως αντιστρέφονται.

Η γραφική παράσταση των $f^{-1}, \varphi^{-1}, \psi^{-1}$ είναι συμμετρική των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων των f, φ, ψ , ως προς τη διχοτόμο $y = x$.

Για τη συνάρτηση g, υπάρχει ευθεία παράλληλη στον $x'x$, που τέμνει τη C_g σε τουλάχιστον δύο σημεία.

Άρα η συνάρτηση g δεν είναι $1-1$ και επομένως δεν αντιστρέφεται.

Να δοθεί ιδιαίτερη **προσοχή** στην παρακάτω άσκηση :

Άσκηση 4 σελ. 39

Να δείξετε ότι :

i. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.

ii. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ, τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

iii. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η συνάρτηση fg είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

Ανάλογα συμπεράσματα διατυπώνονται, αν οι f, g είναι γνησίως φθίνουσες σε ένα διάστημα Δ.

Λύση

i) Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

f γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$

$$-f(x_1) > -f(x_2)$$

$$(-f)(x_1) > (-f)(x_2)$$

Αφού $x_1 < x_2 \Longrightarrow (-f)(x_1) > (-f)(x_2)$ καταλαβαίνουμε ότι η $-f$ γν. φθίνουσα στο Δ.

ii) Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

f γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $f(x_1) < f(x_2)$ **(1)**

g γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $g(x_1) < g(x_2)$ **(2)**

$(1) + (2) \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) < f(x_2) + g(x_2)$

$(f + g)(x_1) < (f + g)(x_2)$

Επομένως καταλαβαίνουμε ότι η $f + g$ γνησίως αύξουσα στο Δ.

iii) Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$.

f γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $0 \leq f(x_1) < f(x_2)$ **(1)**

g γνησίως αύξουσα στο Δ $\Rightarrow$ $0 \leq g(x_1) < g(x_2)$ **(2)**

$(1), (2) \Rightarrow f(x_1) \cdot g(x_1) < f(x_2) \cdot g(x_2)$

$(f \cdot g)(x_1) < (f \cdot g)(x_2)$

Επομένως καταλαβαίνουμε ότι η $f \cdot g$ γνησίως αύξουσα στο Δ.