2.5 Το θεώρημα μέσης τιμής

Α΄ Ομάδας

Άσκηση 3 σελ. 131

Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και στη συνέχεια ότι:

$$e^{\alpha} < \frac{e^{\beta} - e^{\alpha}}{\beta - \alpha} < e^{\beta} \quad \text{και} \quad \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}.$$

Για τη συνάρτηση $g(x) = \ln x$ υποθέτουμε επιπλέον ότι $0 < \alpha < \beta$.

Λύση

- Η $f(x) = e^x$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = e^x$. Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής διαφορικού λογισμού, υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha} = \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha} \Leftrightarrow e^{\xi} = \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha}$ (1)

  Είναι: $\alpha < \xi < \beta$ και η e^x είναι γνησίως αύξουσα οπότε από (1) έπεται: $e^{\alpha} < e^{\xi} < e^{\beta} \Leftrightarrow e^{\alpha} < \frac{e^{\beta}-e^{\alpha}}{\beta-\alpha} < e^{\beta}$

- Η $f(x) = \ln x$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f'(x) = \frac{1}{x}$. Επομένως, από το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha}$$

  Είναι: $\alpha < \xi < \beta$ και $\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha}$ οπότε:

$$\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\xi} < \frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}$$

Β΄ Ομάδας

Άσκηση 1 β ' ομάδας σελ. 131

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4-20x^3-25x^2-x+1$

i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$ και μια, τουλάχιστον, στο διάστημα $(0,1)$.

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-60x^2-50x-1=0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(-1,1)$.

Λύση

i. Θα ελέγξουμε αρχικά αν ισχύει το θεώρημα Bolzano. Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ ως πολυωνυμική . Επίσης:

- $f(-1)=(-1)^4-20(-1)^3-25(-1)^2-(-1)+1=$
  $=1+20-25+1+1=-2<0$
- $f(0)=1>0$

Επομένως, $f(-1)\cdot f(0)<0$.

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(-1,0)$: $f(x_1)=0$.

Επίσης, η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική . Επίσης:

- $f(1)=1-20-25-1+1=1-20-25-1+1=-44<0$
- $f(0)=1>0$

Επομένως, $f(1)\cdot f(0)<0$.

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in(0,1)$: $f(x_2)=0$. Άρα, η f έχει δύο τουλάχιστον ρίζες μία στο $(-1,0)$ και μία στο $(0,1)$.

ii. Η συνάρτηση f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο

$$[x_1, x_2] \subseteq [-1,1]$$

με $x_1 \in (-1,0)$ $\kappa\alpha\iota$ $x_2 \in (0,1)$.

Είναι παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με $f'(x) = 4x^3 - 60x^2 - 50x - 1$.

Είναι : $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

Οπότε, ισχύει το θεώρημα Rolle για την f οπότε:

Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2) \subseteq (-1,1)$ τέτοιο ώστε:

$f'(\xi) = 0 \;\Leftrightarrow 4\xi^3 - 60\xi^2 - 50\xi - 1 = 0$.

Επομένως, η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον ρίζα στο $(-1,1)$.

Άσκηση 4 β ' ομάδας σελ. 132

i) Να αποδείξετε ότι $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν f είναι μία συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = \frac{x}{1+x^2}$, να αποδείξετε ότι για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|.$$

Λύση

i. $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|x|}{|1+x^2|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2|x| \leq |1+x^2| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2|x| \geq 0 \Leftrightarrow |x|^2 - 2|x| + 1 \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (|x| - 1)^2 \geq 0$ ισχύει.

ii. Για $\alpha \neq \beta$, η f στο διάστημα με άκρα τα α, β ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Άρα υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow \frac{\xi}{1+\xi^2} = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Από το ερώτημα (i) για $x = \xi$ προκύπτει ότι :

$$\left|\frac{\xi}{1+\xi^2}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}\right| \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{|f(\beta) - f(\alpha)|}{|\beta - \alpha|} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |f(\beta) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|\beta - \alpha|$

Άσκηση 5 β ' ομάδας σελ. 132

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,4]$ και ισχύει $2 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (0,4)$. Αν $f(0)=1$, να αποδείξετε ότι $9 \leq f(4) \leq 21$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,4]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,4)$ άρα ικανοποιεί το Θ.Μ.Τ. οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,4)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0}$.

Αφού είναι $2 \leq f'(x) \leq 5$ για κάθε $x \in (0,4)$ θα είναι και

$$2 \leq f'(\xi) \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{f(4)-f(0)}{4-0} \leq 5 \Leftrightarrow 2 \leq \frac{f(4)-1}{4} \leq 5 \Leftrightarrow$$

$$8 \leq f(4)-1 \leq 20 \Leftrightarrow 8+1 \leq f(4) \leq 20+1 \Leftrightarrow 9 \leq f(4) \leq 21$$

Άσκηση 6 β ' ομάδας σελ. 132

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[-1,1]$ και ισχύει $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$. Αν $f(-1) = -1$ και $f(1) = 1$, να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$, εφαρμόζοντας το Θ.Μ.Τ. για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,0]$ και $[0,1]$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και παραγωγίσιμη στο $(-1,0)$ από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_1 \in (-1,0)$: $f'(\xi_1) = \frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \; f'(\xi_1) = \frac{f(0)+1}{1} \quad \Leftrightarrow f'(\xi_1) = f(0)+1$$

Όμως, $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$ οπότε ισχύει και για

$$\xi_1 \in (-1,0)$$

Συνεπώς: $f'(\xi_1) \le 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; f(0)+1 \; \le 1 \Leftrightarrow \;\; f(0) \; \le \; 0 \;\; (1)$

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ από Θ.Μ.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (0,1)$: $f'(\xi_2) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \; f'(\xi_2) = \frac{1-f(0)}{1} \quad \Leftrightarrow f'(\xi_2) = 1-f(0)$$

Όμως, $f'(x) \le 1$ για κάθε $x \in (-1,1)$ οπότε ισχύει και για

$$\xi_2 \in (0,1)$$

Συνεπώς: $f'(\xi_2) \le 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; 1-f(0) \; \le 1 \Leftrightarrow \;\; f(0) \; \ge \; 0 \;\; (2)$

Από (1) *και* (2) συνεπάγεται ότι : $f(0) = 0$.

ΣΧΟΛΙΟ

Για $x_o \in (-1,1)$ είναι :

$$\frac{f(1)-f(x_o)}{1-x_o} = f'(\xi_1) \leq 1, \qquad \xi_1 \in (x_o, 1)$$

$$\frac{f(x_o)-f(-1)}{x_o+1} = f'(\xi_2) \leq 1, \qquad \xi_2 \in (-1, x_o)$$

Άρα: $f(1)-f(x_o) \leq 1-x_o \qquad (1)$

$f(x_o)-f(-1) \leq x_o+1 \qquad (2)$

$(1) \Longrightarrow \quad f(x_o) \geq x_o$

$(2) \Longrightarrow \quad f(x_o) \leq x_o$

Άρα, $f(x_o) = x_o$.

Εκτός από το 0 ισχύει $f(x) = x$ παντού.

Άσκηση 7 β ' ομάδας σελ. 132

Να αποδείξετε με το θεώρημα του Rolle ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = 2^x \text{ και } g(x) = -x^2 + 2x + 1$$

έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία τα $A(0,1)$, $B(1,2)$.

Λύση

Για να ισχύει το ζητούμενο πρέπει να δείξουμε ότι η εξίσωση

$f(x) = g(x)$ έχει 2 ρίζες.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\mathrm{h}(x) = f(x) - g(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$.

Παρατηρούμε ότι : $\mathrm{f}(0) = \mathrm{g}(0) = 1$ και $f(1) = g(1) = 2$. Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν κοινά σημεία A *και* B. Έστω ότι έχουν και ένα τρίτο κοινό $Γ$.

Έστω ότι τα σημεία A, B *και* $Γ$ έχουν τετμημένες $\xi_1, \ \xi_2, \ \xi_3$ με

$\xi_1 < \ \xi_2 < \ \xi_3$.

Τότε : $f(\xi_1) = g(\xi_1)$, $\ f(\xi_2) = g(\xi_2)$ *και* $f(\xi_3) = g(\xi_3)$.

Η συνάρτηση $\mathrm{h}(x) = f(x) - g(x) = 2^x + x^2 - 2x - 1$ είναι συνεχής στα διαστήματα $[\xi_1, \xi_2]$ *και* $[\xi_2, \xi_3]$, παραγωγίσιμη στα (ξ_1, ξ_2) *και* (ξ_2, ξ_3) με $h'(x) = 2^x ln2 + 2x - 2$ και ισχύει :

$$h(\xi_1) = h(\xi_2) = h(\xi_3) = 0$$

Επομένως, ικανοποιούνται οι συνθήκες του θεωρήματος *Rolle* στα $[\xi_1, \xi_2]$ *και* $[\xi_2, \xi_3]$ οπότε υπάρχουν $x_1 \in (\xi_1, \ \xi_2)$ *και* $x_2 \in (\xi_2, \ \xi_3)$ τέτοια ώστε :

$h'(\xi_1) = 0 \;\; \kappa\alpha\iota \; h'(\xi_2) = 0$

Η h' είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) με

$h''(x) = 2^x \ln^2 2 + 2 > 0$ και $h'(\xi_1) = h'(\xi_2) = 0$.

Οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2)$:

$h''(\xi) = 0 \iff 2^{\xi} \ln^2 2 + 2 = 0$. Άτοπο, αφού $h''(x) > 0 \;\; \gamma\iota\alpha \; \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \; x$.

Άρα, η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες τις 0, 1.

2.6 Συνέπειες του θεωρήματος μέσης τιμής

Α’ Ομάδας

Άσκηση 1 σελ. 138

Αν για τις συναρτήσεις f, g ισχύουν:

$$f'(x) = g(x) \text{ και } g'(x) = -f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = [f(x)]^2 + [g(x)]^2$ είναι σταθερή.

Λύση

Η φ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως άθροισμα συνεχών.

Επίσης: $\varphi'(x) = (([f(x)])^2)' + (([g(x)])^2)' =$

$= 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) + 2g(x)\big(-f(x)\big) =$

$= 2f(x)g(x) - 2f(x)g(x) = 0$

Οπότε,, η φ είναι σταθερή συνάρτηση, δηλαδή υπάρχει $c \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = c$$

Άσκηση 2 σελ. 138

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i) $f(x) = x^3 + 3x - 4$ ii) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$

iii) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Λύση

i. Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$.

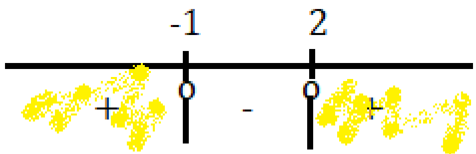
$f'(x) = 3x^2 + 3 \; > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$.

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$

Γιατί η $x^2 - x - 2 = 0$ έχει ρίζες -1, 2.



x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f'		+	0	$-$	0	+	
f		↗		↘		↗	

Δηλαδή:

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -1]$ *και* $[2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[-1,2]$.

iii. Πεδίο ορισμού : $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)' = \frac{(x)'(x^2+1) - x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} =$$
$$= \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff -x^2+1=0 \iff x^2=1 \iff x=\pm 1$$

Άρα $f'(x) = -\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	↘		↗		↘

Δηλαδή:

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $(-\infty,-1]$ $\;και\;$ $[1,+\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1,1]$.

Άσκηση 5 σελ. 138

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^5+5x-6$ και $g(x)=2\sqrt{x}+x-3$.

i) Να αποδείξετε ότι οι f, g είναι γνησίως αύξουσες.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

iii) Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

$$x^5+5x-6=0 \text{ και } 2\sqrt{x}+x-3=0$$

έχουν ακριβώς μία ρίζα την $x=1$.

Λύση

i) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

$f'(x)=5x^4+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Η g έχει πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$.

$g'(x)=2\frac{1}{2\sqrt{x}}+1=\frac{1}{\sqrt{x}}+1>0$, $x>0$.

Επομένως και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ii) Πεδίο ορισμού της f: $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$.

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^5=-\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^5=+\infty$

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα το σύνολο τιμών της είναι το :

$$(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$$

Πεδίο ορισμού της g: $[0,+\infty)$.

$g(0)=-3$ και $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$

Επειδή η g είναι γνησίως αύξουσα το σύνολο τιμών της είναι το :

$$[-3,+\infty)$$

iii. Εύκολα βλέπουμε ότι $f(1)=0$. Επειδή η f γνησίως αύξουσα το 1 είναι μοναδική ρίζα.

Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι $g(1)=0$. Επειδή η g γνησίως αύξουσα το 1 είναι μοναδική ρίζα.

Άσκηση 6 σελ. 138

Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1 + \ln(x+1)$ είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Η εξίσωση $e^x = 1 - \ln(x+1)$ έχει ακριβώς μία λύση την $x = 0$.

Λύση

i) Πρέπει : $x + 1 > 0 \iff x > -1$. Οπότε το πεδίο ορισμού της f είναι το $(-1, +\infty)$.

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x+1}(x+1)' = e^x + \frac{1}{x+1} > 0 \ \text{για}\ x > -1.$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$.

ii) $e^x = 1 - \ln(x+1) \iff e^x - 1 + \ln(x+1) = 0 \iff f(x) = 0$.

Είναι: $f(0) = e^0 - 1 + \ln(0+1) = 1 - 1 + 0 = 0$.

Επομένως, η $x = 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα η $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της.

Β’ Ομάδας

Άσκηση 1 β′ ομάδας σελ. 139

Αν για μία συνάρτηση f που είναι ορισμένη σ’ όλο το $\mathbb{R}$ ισχύει

$$|f(x)-f(y)| \le (x-y)^2 \text{ για όλα τα } x, y \in \mathbb{R},$$

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή.

Λύση

Η σχέση ισχύει και για $x = x_o$ οπότε είναι :

$$|f(x)-f(x_o)| \le |x-x_o|^2 \Leftrightarrow \frac{|f(x)-f(x_o)|}{|x-x_o|} \le |x-x_o| \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}\right| \le |x-x_o| \Leftrightarrow$$

$$-|x-x_o| \le \frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} \le |x-x_o|$$

Είναι : $\lim\limits_{x\to x_o}(-|x-x_o|) = \lim\limits_{x\to x_o}|x-x_o| = 0$ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής ισχύει : $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(x_o) = 0.$

Είναι: $f'(x_o) = 0$ *για κάθε* $x_o \in \mathbb{R}$ επομένως η f είναι σταθερή.

Άσκηση 2 β′ ομάδας σελ. 139

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + \alpha$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1,1]$.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[-1,1]$.

iii) Αν $-2 < \alpha < 2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + \alpha = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1,1)$.

Λύση

i) Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ ως πολυωνυμική και

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) < 0$ για κάθε $x \in (-1,1)$.

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$.

ii) $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + a = -1 + 3 + a = a + 2$

$f(1) = 1^3 - 3 + a = a - 2$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,1]$ οπότε το σύνολο τιμών είναι το $[\alpha - 2, \alpha + 2]$.

i) Η f είναι συνεχής στο $[-1,1]$ με σύνολο τιμών το $[\alpha - 2, \alpha + 2]$ και το $0 \in [\alpha - 2, \alpha + 2]$ αφού από την υπόθεση είναι $-2 < \alpha < 2$.

Επομένως, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (-1,1)$: $f(x_o) = 0$.

Επειδή, η f είναι γνησίως φθίνουσα το x_o είναι μοναδικό.

Άσκηση 3 β΄ ομάδας σελ. 139

Η θέση ενός κινητού πάνω σε έναν άξονα τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x = S(t) = t^4 - 8t^3 + 18t^2 - 16t + 160,\ 0 \le t \le 5.$$

Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού και στη συνέχεια να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

i) Πότε το κινητό έχει ταχύτητα μηδέν;

ii) Πότε το κινητό κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;

iii) Πότε η ταχύτητα του κινητού αυξάνεται και πότε μειώνεται;

Λύση

Η ταχύτητα είναι: $u(t) = s'(t) = 4t^3 - 24t^2 + 36t - 16$, ενώ η επιτάχυνσή του είναι : $\alpha(t) = u'(t) = 12t^2 - 48t + 36$.

i) Για να έχει το κινητό ταχύτητα μηδέν πρέπει $u(t) = 0 \iff$

$4t^3 - 24t^2 + 36t - 16 = 0 \iff t^3 - 6t^2 + 9t - 4 = 0$

Κάνουμε σχήμα Horner:

1	-6	9	-4	$\rho = 1$
	1	-5	4	
1	-5	4	0	

Δηλαδή το 1 είναι ρίζα και το $t-1$ παράγοντας. Οπότε η εξίσωση γίνεται :

$(t-1)(t^2 - 5t + 4) = 0 \iff (t-1)(t-1)(t-4) = 0 \iff$

$\iff (t-1)^2(t-4) = 0 \iff t = 1$ ή $t = 4$

ii) Πρέπει να δούμε πότε η ταχύτητα είναι θετική και πότε αρνητική.

$u(t) > 0 \iff (t-1)^2(t-4) > 0 \iff t - 4 > 0 \iff t > 4$

t	0	1	4	5

$u(t) = x'(t)$	$-$	$-$	$+$

Επομένως, το κινητό κινείται προς τα αριστερά στο διάστημα $(0,4)$ και προς τα δεξιά στο διάστημα $(4,5)$.

iii) Στο ερώτημα αυτό θέλουμε να δούμε πότε κάνει επιταχυνόμενη και πότε επιβραδυνόμενη κίνηση.
Δηλαδή πότε $είναι\ \alpha(t) > 0 \quad και\ πότε\ \alpha(t) < 0$.

$\alpha(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; u'(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; 12t^2 - 48t + 36 = 0 \;\Leftrightarrow$
$t^2 - 4t + 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = 1$ ή $t = 3$

t	0	1	3	5
$a(t) = u'(t)$	$+$	$-$	$+$	

Επομένως, η ταχύτητά του αυξάνεται στα διαστήματά $[0,1]$, $[3,5]$ και μειώνεται στο διάστημα $[1,3]$.

Άσκηση 5 β΄ ομάδας σελ. 139

Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3-9x}{x^2-1}$ είναι γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού της και να βρείτε το σύνολο των τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα αυτά.

ii) Η εξίσωση $x^3-\alpha x^2-9x+\alpha=0$ είναι ισοδύναμη με την $f(x)=\alpha$ και στη συνέχεια ότι έχει τρεις πραγματικές ρίζες για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$.

Λύση

i) Πεδίο ορισμού: πρέπει $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow x^2\neq 1 \Leftrightarrow x\neq \pm 1$.

Οπότε, το πεδίο ορισμού είναι το:

$A=\mathbb{R}-\{-1,1\}=(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$

$$f'(x)=\frac{(x^3-9x)'(x^2-1)-(x^3-9x)(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}=$$

$$=\frac{(3x^2-9)(x^2-1)-2x(x^3-9x)}{(x^2-1)^2}=\frac{3x^4-3x^2-9x^2+9-2x^4+18x^2}{(x^2-1)^2}=$$

$$\frac{x^4+6x^2+9}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2+3)^2}{(x^2-1)^2}>0$$

x	$-\infty$ -1	1	$+\infty$
f'	$+$	$+$	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$	$-\infty \nearrow +\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^-}\frac{x^3-9x}{(x-1)(x+1)}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3-9x}{x^2-1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{x^3-9x}{(x-1)(x+1)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-9x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-9x}{(x-1)(x+1)} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-9x}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{x^3-9x}{(x-1)(x+1)} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^3-9x}{x^2-1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} x = +\infty$$

Επομένως, το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ αφού η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από αυτά.

ii) $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0 \iff x^3 - 9x = ax^2 - a \iff$

$x^3 - 9x = a(x^2-1) \iff \frac{x^3-9x}{x^2-1} = a \iff f(x) = a$

Θα δείξουμε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα σε καθένα από τα $(-\infty,-1)$, $(-1,1)$, $(1,+\infty)$.

Το σύνολο τιμών της f σε καθένα από τα διαστήματα του πεδίου ορισμού είναι το $\mathbb{R}$ και το 0 ανήκει στο $\mathbb{R}$ οπότε υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα σε καθένα από αυτά τα διαστήματα. Η συνάρτηση όμως είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα αυτά οπότε οι τρεις αυτές ρίζες είναι μοναδικές.

Η $x^3 - ax^2 - 9x + a = 0$ δεν έχει ρίζες τα $-1, 1$. Γιατί αν είχε το1 τότε $1 - 9 = 0$ *άτοπο*. Αν είχε το -1 τότε $1 - a + 9 + a = 0$ δηλαδή $1 + 9 = 0$ *άτοπο*.

Άσκηση 6 β′ ομάδας σελ. 139

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}^*$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Λύση

Είναι: $f'(x) = 3\alpha x^2 + 6x + 1$

$\Delta = 6^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot 1 = 36 - 12\alpha$

- Αν $\Delta > 0 \Leftrightarrow 36 - 12\alpha > 0 \Leftrightarrow -12\alpha > -36 \Leftrightarrow \alpha < 3$ τότε το $f'(x)$ έχει 2 ρίζες και το f' θα είναι ομόσημο του α εκτός των ριζών και ετερόσημο εντός . Δηλαδή, εναλλάσσει πρόσημο και άρα και δεν έχει σταθερή μονοτονία.
- Αν $\Delta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3$ τότε έχει 1 διπλή ρίζα τη $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{1}{3}$ και για $x \neq -\frac{1}{3}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο, δηλαδή είναι θετικό για $\alpha > 0$ και αρνητικό για $\alpha < 0$. Άρα, για $x \neq -\frac{1}{3}$ είναι γνησίως αύξουσα.
- Αν $\Delta < 0 \Leftrightarrow \alpha > 3$ το $f'(x)$ δεν έχει πραγματικές ρίζες οπότε είναι ομόσημο του 3α για κάθε τιμή του x.

Άρα, οι ζητούμενες τιμές του α , είναι οι $\alpha \geq 3$.

Άσκηση 7 β΄ ομάδας σελ. 140

Να αποδείξετε οτι:

i) Η συνάρτηση $f(x)=\etaμx-xσυνx$ είναι γνησίως αύξουσα στο κλειστό διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii) $\etaμx-xσυνx>0$, για κάθε $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

iii) Η συνάρτηση $f(x)=\frac{\etaμx}{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα στο ανοικτό διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών σε όλο το πεδίο ορισμού της που είναι το $\mathbb{R}$ άρα και στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$f'(x)=συνx-(συνx-x\etaμx)=x\etaμx>0,\ \ x\in(0,\frac{\pi}{2})$$

Επομένως, η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Άρα $x\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ έχουμε : $f(x)>f(0)$.

Αφού $f(0)=0$ είναι $f(x)>0$ για $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

ή $\etaμx-xσυνx>0$.

iii. Η $f(x)=\frac{\etaμx}{x}$ είναι συνεχής και :

$$f'(x)=\frac{(\etaμx)'\cdot x-\etaμx\cdot(x)'}{x^2}=\frac{xσυνx-\etaμx}{x^2}<0$$

(από ερώτημα i)

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Σχόλιο στο (iii):

Η $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$ ορίζεται στο $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Αφού δείχθηκε ότι είναι γνησίως φθίνουσα θα έχουμε:

$$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\ \Longrightarrow\ f(x)>f(\frac{\pi}{2})$$

Αφού $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$ παίρνουμε $\frac{\eta\mu x}{x}>\frac{2}{\pi}$ για $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

ή $\eta\mu x>\frac{2}{\pi}-x$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.