Ομάδα Α:

Άσκηση 1 σελίδα 27

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$i)\ f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$ $\qquad ii)\ f(x)=\sqrt[3]{x-1}+\sqrt{2-x}$

$iii)\ f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\qquad iv) f(x)=\ln(1-e^x)$

Λύση

i. Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-3x+2 είναι 1 και 2. Πρέπει :

$$x^2-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1 \ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\ x\neq 2.$$

Άρα, $D_f=(-\infty,1)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

ii. Πρέπει :

$$x-1\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ 2-x\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x\geq 1\ \kappa\alpha\iota\ x\leq 2 \Leftrightarrow 1\leq x\leq 2.\ Άρα:\ Df=[1,2]$$

iii. Πρέπει :

$$x\neq 0\ \kappa\alpha\iota\ 1-x^2\geq 0$$

$$1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 1 \Leftrightarrow |x|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$$

Άρα: $D_f=[-1,0)\cup(0,1]$.

iv. Πρέπει : $1-e^x>0 \Leftrightarrow e^x<1 \Leftrightarrow e^x<e^0 \Leftrightarrow x<0.$

$$Άρα:\ D_f=(-\infty,0)$$

Άσκηση 2 σελίδα 27

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν :

i) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

ii) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

iii) $f(x) = e^x - 1$

Λύση

Πρέπει :

$i)\ f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow$

$o\ x$ εκτός των ριζών του τριωνύμου, $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ x < 1$ ή $x > 3$.

Οπότε : $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

$ii)$ $\mathrm{f(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$iii)\ f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0.$

Άσκηση 3 σελίδα 27

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης γ όταν:

$i)\ f(x) = x^3 + 2x + 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x) = x + 1$

$ii)\ f(x) = x^3 + x - 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x) = x^2 + x - 2$

Λύση

i) Πρέπει: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow$

$x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ αφού:

$x^2 + 1 > 0\ \forall\ x \in \mathbb{R}$

ii) Πρέπει: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > x^2 + x - 2 \Leftrightarrow$

$x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ αφού:

$x^2 \geq 0 \ \forall \, x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 7 σελ. 28

Να εξετάσετε σε ποιες περιπτώσεις είναι $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i) $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$

ii) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+|x|}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$

iii) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$

Λύση

i) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [0, +\infty)$. Άρα $f \neq g$.

Το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το $[0, +\infty)$, αφού για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει :

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x = \left(\sqrt{x}\right)^2 = g(x)$$

ii) Για το D_f : Πρέπει:

$x^2 + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|(|x| + 1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Για το D_g : Πρέπει :

$$|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Άρα $D_f = D_g$.

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+|x|}=\frac{|x|^2-1}{|x|^2+|x|}=\frac{(|x|-1)(|x|+1)}{|x|(|x|+1)}=$$
$$\frac{|x|-1}{|x|}=1-\frac{1}{|x|}=g(x),\forall\, x\in\mathbb{R}^*$$

$iii.$

Για το D_f:

Πρέπει $x\ \geq\ 0$ και $\sqrt{x}$ – 1 $\neq\ 0\ \Leftrightarrow\ \ x\geq 0\ και\ \sqrt{x}\neq 1\ \Leftrightarrow x\neq 1$

x ≥ 0 και x ≠ 1

Άρα: $D_f\ =\ [0,1)\cup\ (1,+\infty)$

$Dg\ =\ [0,+\infty)$

$Άρα, f\ \neq\ g.$

Για κάθε : $x\in[0,1)\cup\ (1,+\infty)$ είναι :

$$\mathrm{f}(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1}=$$
$$\sqrt{x}+1=g(x)$$

Επομένως, το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x)\ =\ g(x)$ είναι το $[0,1)\cup\ (1,+\infty)$.

Άσκηση 8 σελίδα 28

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ $\kappa\alpha\iota$ $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις :

$$f+g, \qquad f-g, \qquad fg \ \kappa\alpha\iota\ \frac{f}{g}$$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}^*$, $\quad D_g = \mathbb{R} - \{1\}$, $D = \mathbb{R} - \{0,1\}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{x(1-x) + 1 - x + x^2}{x(1-x)}$$

$$= \frac{1}{x(1-x)}, \quad x \in D.$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{1-x} = \frac{x(1-x) + 1 - x - x^2}{x(1-x)}$$

$$= \frac{-2x^2+1}{x(1-x)}, x \in D.$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) =$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x+1}{1-x}, x \in D.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + \frac{1}{x}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x^2}{x^2}, \quad x \in D, g(x) \neq 0.$$

Άσκηση 10 σελίδα 28

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$, αν :

$i)\ f(x) = x^2\ \ και\ g(x) = \sqrt{x}\quad ii)\ \ f(x) = ημx\ \ και\ g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$iii)\ \ f(x) = \frac{\pi}{4}\ \ \ και\ g(x) = εφx$

Λύση

$i)\ D_f = \mathbb{R}\ (πολυωνυμική)$ και $D_g = [0, +\infty)$ αφού πρέπει $x \geq 0$ γιατί βρίσκεται κάτω από ρίζα.

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 \in [0, +\infty)\} = \mathbb{R}$

Αφού $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$

$ii)\ D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [-1,1]$ αφού πρέπει $1 - x^2 \geq 0$ γιατί βρίσκεται κάτω από ρίζα.

Οπότε : $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow\ -x^2 \geq -1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 1 \Leftrightarrow$

$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / ημx \in [-1,1]\} = \mathbb{R}$

Αφού $-1 \leq ημx \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(ημx) = \sqrt{1 - ημ^2x} = \sqrt{συν^2x} = |συνx|$

$iii)$ Η f είναι πολυωνυμική οπότε το πεδίο ορισμού της είναι :

$D_f = \mathbb{R}$.

Για την $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει : $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2},\ \kappa \in \mathbb{Z}$. Άρα, $D_g = \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / \dfrac{\pi}{4} \neq \kappa\pi + \dfrac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}.$

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Άσκηση 11 σελίδα 27

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g. Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική οπότε το x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι :

$D_f = \mathbb{R}.$

Τώρα για τη g : Κάτω από τη ρίζα μπορούμε να βάλουμε μόνο μη αρνητικούς αριθμούς άρα πρέπει να αποκλείσουμε τους αρνητικούς. Δηλαδή : $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Οπότε το πεδίο ορισμού της g είναι :

$D_g = [2, +\infty).$

$\boldsymbol{g \circ f}$

Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$:

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 + 1) \in [2, +\infty)\} =$

$\{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\}$

Παίρνω ξεχωριστά τη σχέση $x^2-1\geq 0$.

$x^2-1\geq 0 \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow |x|^2\geq 1 \Leftrightarrow |x|\geq 1 \Leftrightarrow x\leq -1$ ή $x\geq 1$

$D_{g\circ f} = \{x\in\mathbb{R}/x\leq -1$ ή $x\geq 1\} = (-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$

Βρίσκουμε τον τύπο της $g\circ f$.

$$(g\circ f)(x)=g\big(f(x)\big)=\sqrt{x^2+1-2}=\sqrt{x^2-1}$$

(Πηγαίνουμε στον τύπο της g και βάζουμε όπου x to $f(x)=x^2+1$.)

$\boldsymbol{f\circ g}$

Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $f\circ g$:

$D_{f\circ g} = \{x\in D_g/g(x)\in D_f\}=\{x\in[2,+\infty)/\sqrt{x-2}\in\mathbb{R}\}$

$D_{f\circ g}=[2,+\infty)$

Βρίσκουμε τον τύπο της $f\circ g$.

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=(\sqrt{x-2})^2+1=x-2+1=x-1$$

(Πηγαίνουμε στον τύπο της f και βάζουμε όπου x to $g(x)=\sqrt{x-2}$.)

Άσκηση 12 σελίδα 28

Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν :

$i)\ f(x) = ημ(x^2+1)$ $\qquad$ $ii)\ f(x) = 2ημ^2 3x + 1$

$iii)\ \ f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$ $\qquad$ $iv)\ \ f(x) = ημ^2(3x)$

Λύση

i. Στην f φαίνονται δύο συναρτήσεις : η $g(x) = x^2 + 1$ και η $h(x) = ημx$.

Τότε : $f(x) = (h \circ g)(x) = h\big(g(x)\big) = h(x^2+1) = ημ(x^2+1)$.

ii. Στην f φαίνονται τρεις συναρτήσεις : η $g(x) = 3x$, η $h(x) = ημx$ και η $φ(x) = 2x^2 + 1$. Τότε : $f(x) = (φ \circ h \circ g)(x) = φ\Big(h\big(g(x)\big)\Big) = φ(ημ3x) = 2ημ^2 3x + 1$.

iii. Στην f φαίνονται τρεις συναρτήσεις : η $g(x) = 2x$, η $h(x) = e^x - 1$ και η $φ(x) = lnx$. Τότε : $f(x) = (φ \circ h \circ g)(x) = φ\Big(h\big(g(x)\big)\Big) = φ(e^{2x} - 1) = \ln(e^{2x} - 1)$.

Όμως, για να ορίζεται ο $\ln(e^{2x} - 1)$ πρέπει:

$e^{2x} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

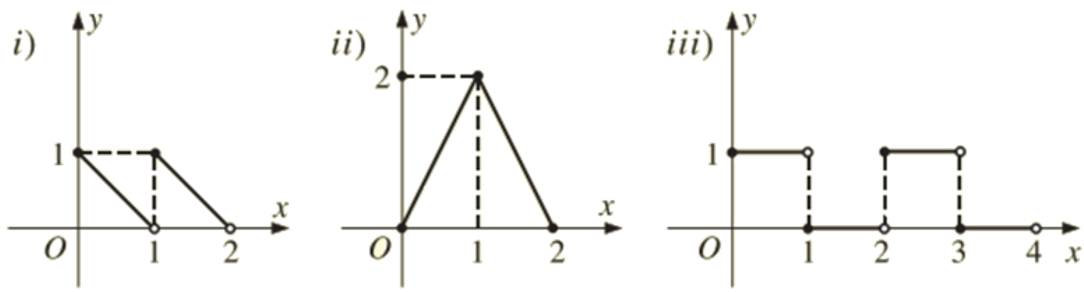
(θυμίζουμε εδώ ότι η e^x είναι γνησίως αύξουσα γι΄ αυτό όταν κατέβηκαν προηγουμένως οι εκθέτες η ανισότητα δεν άλλαξε.

iv. Στην f φαίνονται τρεις συναρτήσεις : η $g(x) = 3x$, η $h(x) = \eta\mu x$ και η $\varphi(x) = x^2$. Τότε : $f(x) = (\varphi \circ h \circ g)(x) = \varphi\left(h\big(g(x)\big)\right) = \varphi(h(3x)) = \varphi(\eta\mu 3x) = \eta\mu^2 3x = f(x)$.

Ομάδα Β

Άσκηση 1 σελίδα 28

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



Λύση

i) Το πρώτο τμήμα ενώνει τα σημεία : $A(1,0)$ και $B(0,1)$.

Είναι : $\lambda_{AB} = \frac{1-0}{0-1} = -1$ και διέρχεται από το A οπότε ανήκει στην ευθεία :

$$y - y_A = \lambda_{AB}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 1$$

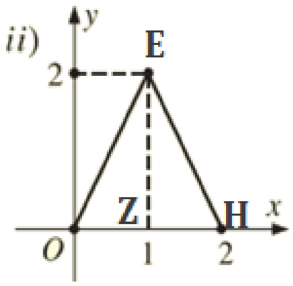
Το δεύτερο τμήμα ενώνει τα σημεία : $\Gamma(2,0)$ και $\Delta(1,1)$.

Είναι : $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{1-0}{1-2} = -1$ και διέρχεται από το Γ οπότε ανήκει στην ευθεία :

$$y - y_\Gamma = \lambda_{\Gamma\Delta}(x - x_\Gamma) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x-2) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Οπότε η συνάρτηση είναι : $f(x) = \begin{cases} -x+1, 0 \leq x < 1 \\ -x+2, \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

ii)



Για το $\boldsymbol{OE}$: $O(0,0)$ $και$ $E(1,2)$ οπότε : $\lambda_{OE} = \frac{2-0}{1-0} = 2$ και διέρχεται από το E. Έτσι η OE είναι : $y - y_E = \lambda_{OE}(x - x_E) \Leftrightarrow$

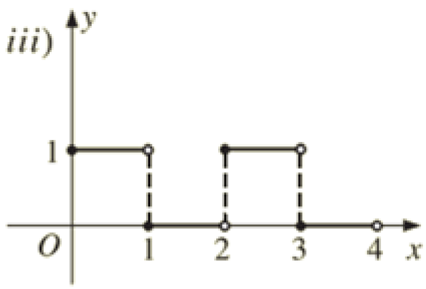
$y - 2 = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow y = 2x$

Για το $\boldsymbol{HE}$: H$(2,0)$ $και$ $E(1,2)$ οπότε : $\lambda_{HE} = \frac{2-0}{1-2} = -2$ και διέρχεται από το E. Έτσι η HE είναι : $y - y_E = \lambda_{HE}(x - x_E) \Leftrightarrow$

$y - 2 = -2(x-1) \Leftrightarrow y = -2x + 2 + 2 \Leftrightarrow y = -2x + 4$

Οπότε η συνάρτηση είναι : $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leq x \leq 1 \\ -2x+4, \ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

iii)



Το πρώτο τμήμα τέμνει τον y στο 1 και είναι παράλληλη στον $x'x$. Άρα, είναι η $y = 1$. Το ίδιο και το τρίτο τμήμα. Τα άλλα δύο βρίσκονται πάνω στον $x'x$ και έχουν εξίσωση $x = 0$.

Έτσι, η συνάρτηση είναι : $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \text{ ή } 2 \leq x < 3 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \text{ ή } 3 \leq x < 4 \end{cases}$

Άσκηση 5 σελίδα 28

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση :

$i)\ f(x) = \frac{|x+1|+|x-1|}{2} \quad ii)\ f(x) = \frac{\eta\mu x+|\eta\mu x|}{2},\ x \in [0,2\pi]$

Από τη γραφική παράσταση της f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

Λύση

i) Για $\boldsymbol{x < -1}$, η f γίνεται : $f(x) = \frac{-x-1-x+1}{2} = -\frac{2x}{2} = -x$, αφού για $x < -1 \Leftrightarrow x+1 < 0$, $\kappa\alpha\iota\ x < -1 \Leftrightarrow x-1 < -1-1 \Leftrightarrow x-1 < -2 < 0$

Για $\boldsymbol{-1 \leq x < 1}$, η f γίνεται : $f(x) = \frac{x+1-x+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, αφού : $x \geq -1 \Leftrightarrow x+1 \geq 0\ \ \kappa\alpha\iota\ x < 1 \Leftrightarrow x-1 < 0$

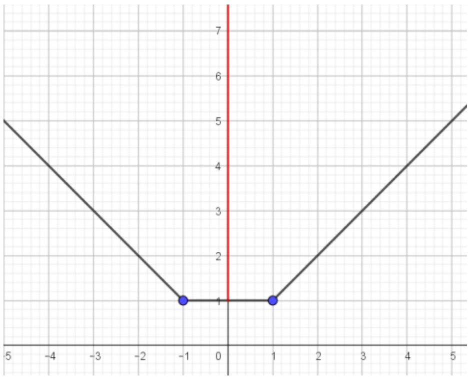
Για $\boldsymbol{x \geq 1}$, η f γίνεται : $f(x) = \frac{x+1+x-1}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

Για $x < -1$, $f(x) = -x$ η οποία είναι η διχοτόμος της $2^{ης}$ γωνίας.

Για $-1 \leq x < 1, f(x) = 1$ η οποία είναι σταθερή συνάρτηση και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο 1. Απλώς θα κρατήσουμε μόνο το κομμάτι ανάμεσα στο -1 και 1.

Για $x \geq 1, f(x) = x$ η οποία είναι η διχοτόμος της $1^{ης}$ γωνίας.

Οπότε, η γραφική της παράσταση είναι :



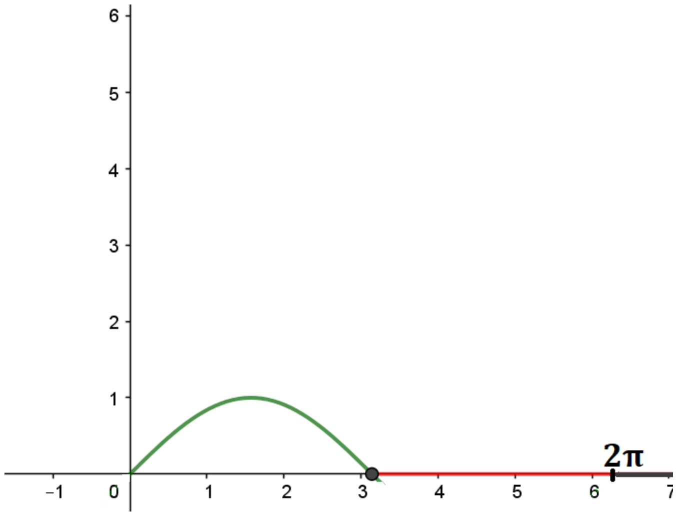
Από το σχήμα φαίνεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

ii)

Όταν : $0 \leq x \leq \pi : f(x) = \frac{\eta\mu x + \eta\mu x}{2} = \eta\mu x$.

Όταν : $\pi \leq x \leq 2\pi : f(x) = \frac{\eta\mu x - \eta\mu x}{2} = 0$.

Η γραφική παράσταση είναι :



Από το σχήμα φαίνεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[0,1]$.

Άσκηση 6 σελίδα 28

Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει :

i) $(f\circ g)(x)=x^2+2x+2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν $g(x)=x+1$.

ii) $(f\circ g)(x)=\sqrt{1+x^2}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν $g(x)=-x^2$.

iii) $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, αν $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Λύση

i) $D_{f\circ g}=\mathbb{R},\quad D_g=\mathbb{R}$

Θέτουμε : $y=g(x)=x+1, \text{οπότε} : x=y-1, y\in\mathbb{R}$.

$(f\circ g)(x)=x^2+2x+2 \;\Rightarrow f\big(g(x)\big)=(y-1)^2+2(y-1)+$

$2 \;\Longrightarrow$

$f(y)=y^2-2y+1+2y-2+2 \;\Longrightarrow f(y)=y^2+1, y\;\in\mathbb{R}$.

Οπότε : $f(x)=x^2+1, x\;\in\mathbb{R}$.

ii)$D_{f\circ g}=\mathbb{R},\quad D_g=\mathbb{R}$

Θέτουμε : $y=g(x)=-x^2\le 0,\;\; \text{οπότε} : x^2=-y, y\in(-\infty,0]$.

$(f\circ g)(x)=\;\sqrt{1+x^2}\Longrightarrow$

$(f\big(g(x)\big)=\sqrt{1-y}\Longrightarrow f(y)=\sqrt{1-y}, y\in(-\infty,0]$

$f(x)=\sqrt{1-x}, x\in(-\infty,0]$

iii)$D_{g\circ f}=\mathbb{R},\;\; D_g=[-1,1]$ γιατί πρέπει :

$1-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 1\Leftrightarrow |x|\le 1\Leftrightarrow -1\le x\le 1$

Στον τύπο $g(x)=\sqrt{1-x^2}$ θέτουμε όπου x, $f(x)\;\mu\varepsilon\; x\in\mathbb{R}$ και βέβαια με $f(x)\in[-1,1]$.

$g\big(f(x)\big)=\sqrt{1-f^2(x)}$, αλλά δίνεται $(g\circ f)(x)=|\sigma\upsilon\nu x|, ; araQ$

$|\sigma\upsilon\nu x| = \sqrt{1-f^2(x)} \Rightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 - f^2(x) \Longrightarrow$

$f^2(x) = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x \Longrightarrow f^2(x) = \eta\mu^2 x \Longrightarrow$

$f(x) = |\eta\mu x|, x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 7 σελίδα 29

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1$ και g(x)= $\alpha x + 2$. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$;

Λύση

Αρχικά, παρατηρούμε ότι : $D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$.

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g / \ g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R}/g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / \ f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}/f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$f \circ g = g \circ f \ \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow$

$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big), \ \forall \ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\alpha x + 2 + 1 = \alpha(x+1) + 2 \ \Leftrightarrow$

$\alpha x + 3 = \alpha x + \alpha + 2 \ \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1}$

Άσκηση 9 σελίδα 29

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}, \ \ \mu\varepsilon \ \beta \neq -\alpha^2 \ \kappa\alpha\iota \ g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και β) $g(g(x)) = x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

Λύση

α) $D_f = \mathbb{R} - \{\alpha\}$

$D_{f\circ f} = \{x \in D_f \; \mu\varepsilon \; f(x) \in D_f\} = \{x \neq \alpha \; \mu\varepsilon \frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha} \neq \alpha\}$

$= \{x \neq \alpha \; \mu\varepsilon \; \alpha x + \beta \neq \alpha(x - \alpha)\}$

$= \{x \neq \alpha \; \mu\varepsilon \; \alpha x + \beta \neq \alpha x - \alpha^2\}$

$= \{x \neq \alpha \; \mu\varepsilon \; \beta \neq -\alpha^2\} = \mathbb{R} - \{\alpha\}$

$$f(f(x)) = \frac{\alpha f(x)+\beta}{f(x)-\alpha} = \frac{\alpha\frac{(\alpha x+\beta)}{x-\alpha}+\beta}{\frac{\alpha x+\beta}{x-\alpha}-\alpha} = \frac{\alpha(\alpha x+\beta)+\beta(x-\alpha)}{\alpha x+\beta-\alpha(x-\alpha)} =$$

$$\frac{\alpha^2 x + \alpha\beta + \beta x - \beta\alpha}{\alpha x + \beta - \alpha x + \alpha^2} =$$

$$\frac{\alpha^2 x+\beta x}{\beta+\alpha^2} = \frac{x(\alpha^2+\beta)}{\beta+\alpha^2} = x$$

β) $D_g = [0,+\infty)$ και $g(x) = (\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x} + 1 = (1 - \sqrt{x})^2$

$D_{g\circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_g\} =$

$\{x \in [0,+\infty)/x - 2\sqrt{x} + 1 \in [0,+\infty)\} =$

$\{x \geq 0 \,/ x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0\} =$

$\{x \geq 0 \,/ \sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0\} =$

$\{x \geq 0 \,/ (\sqrt{x} - 1)^2 \geq 0\} = [0,+\infty)$

$$g(g(x)) = (1 - g(x))^2 = \left(1 - \sqrt{(1-\sqrt{x})^2}\right)^2 =$$

$$\left(1 - |1-\sqrt{x}|\right)^2 = [1-(1-\sqrt{x})]^2 = (\sqrt{x})^2 = x$$

Παρατήρηση : Είναι : $|1-\sqrt{x}| = 1-\sqrt{x}$ γιατί :

$$x \in [0,1] \Longrightarrow 0 \le x \le 1 \Longrightarrow 0 \le \sqrt{x} \le 1 \Longrightarrow 1-\sqrt{x} \ge 0$$