ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 2020 (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)

ΘΕΜΑ Α

Α.1. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου, σελίδα 111

Α.2. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου, σελίδα 111

Α.3. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου, σελίδα 74

Α.4. α) Ψ

β) Αντιπαράδειγμα: Έστω η συνάρτηση $f(x) = x$, με $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και

- Για $x > 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$
- Για $x < 0$: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$

και επειδή $(+\infty) \neq (-\infty)$, τελικά το όριο $\lim_{x\to 0} \frac{1}{f(x)}$ δεν υπάρχει.

Α.5. α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β.1.

1ος τρόπος:

Αρκεί η f να είναι 1-1

Έχουμε

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{3x_1 + 1}{x_1 - 3} = \frac{3x_2 + 1}{x_2 - 3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (3x_1 + 1)(x_2 - 3) = (3x_2 + 1)(x_1 - 3) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3x_1x_2 - 9x_1 + x_2 - 3 = 3x_1x_2 - 9x_2 + x_1 - 3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 10x_2 = 10x_1 \Rightarrow x_2 = x_1$$

Άρα η f είναι 1-1, οπότε αντιστρέφεται.

2ος τρόπος:

$$y = \frac{3x + 1}{x - 3} \Leftrightarrow xy - 3y = 3x + 1 \Leftrightarrow x(y - 3) = 3y + 1$$

Αν $y \neq 3$ τότε $x = \frac{3y+1}{y-3}$, ενώ για $y = 3$παίρνουμε $10 = 0$, δηλ. αδύνατη.

Άρα η $f(x) = y$ για $y = 3$ δεν έχει λύση, ενώ για $y \neq 3$έχει μοναδική λύση: $x = \frac{3y+1}{x-3}$

Μάλιστα είναι $\frac{3y+1}{y-3} \neq 3$

Εάν $\frac{3y+1}{y-3} = 3 \Leftrightarrow 3y + 1 = 3y - 9 \Leftrightarrow 1 = -9$ ΑΤΟΠΟ

Άρα $f^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{3\} \to \mathbb{R} \setminus \{3\}$ με $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}$

Β.2.

Ο 2ος τρόπος του Β.1. μάς δίνει το ζητούμενο.

Β.3.

<u>1ος τρόπος</u>:

Λόγω του Β.2. έχουμε ότι $f(x) = f^{-1}(x)$για $x \neq 3$.

Άρα $f\big(f(x)\big) = f\big(f^{-1}(x)\big) = x$

για $x \neq 3$.

<u>2ος τρόπος</u>:

$$f \circ f(x) = f\big(f(x)\big) = \frac{3f(x)+1}{f(x)-3} = \frac{3 \cdot \frac{3x+1}{x-3} + 1}{\frac{3x+1}{x-3} - 3} = \cdots = x$$

Β.4.

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1} = \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-3} \cdot \eta\mu \frac{1}{3x+1}$$

Αλλά $-|3x+1| \leq (3x+1)\eta\mu\frac{1}{3x+1} \leq |3x+1|$

και $\lim_{x \to -\frac{1}{3}} |3x+1| = 0$

Από το κριτήριο της παρεμβολής είναι :

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} (3x+1)\eta\mu\frac{1}{3x+1} = 0$$

και επιπλέον:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{-\frac{1}{3} - 3}$$

Άρα

$$\lim_{x \to -\frac{1}{3}} f(x) \cdot \eta\mu\frac{1}{3x+1} =$$
$$= \lim_{x \to -\frac{1}{3}} \frac{1}{x-3} \cdot \lim_{x \to -\frac{1}{3}} (3x+1) \cdot \eta\mu\frac{1}{3x+1} =$$
$$= -\frac{1}{\frac{1}{3}+3} \cdot 0 = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

Έχουμε $E = \frac{1}{2}B\Gamma \cdot AM = BM \cdot AM$

και ότι

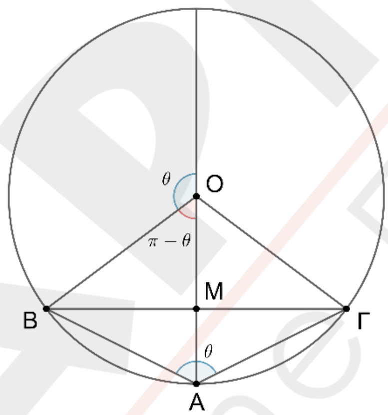
ημ$\theta = \frac{BM}{OB} = BM$,

$$AM = AO + OM$$

και συν$\theta = \frac{OM}{OB}$

Άρα $AM = 1 + $συν$\theta$ και $E(\theta) = (1 + $συν$\theta)$ημ$\theta$

<u>Προσοχή</u>: $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Όταν $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ έχουμε το σχήμα



Είναι πάλι $E = AM \cdot BM$,

ημ$(\pi - \theta) = \frac{BM}{OB}$.

Άρα $BM = $ ημ$(\pi - \theta) = $ ημθ

και $AM = OA - OM = 1 - OM$.

Αλλά $OM = \sigma\upsilon\nu(\pi - \theta) = -$συν$\theta$

και $AM = 1 + $συν$\theta$.

Πάλι $E(\theta) = (1 + $συν$\theta)$ημ$\theta$.

Γ.2.

$E(\theta)=(1+\text{συν}\theta)\text{ημ}\theta$, όπου $\theta\in(0,\pi)$

$$E^{'}(\theta)=-(\text{ημ}\theta)^2+(1+\text{συν}\theta)\text{συν}\theta=(\text{συν}\theta)^2-(\text{ημ}\theta)^2+\text{συν}\theta$$

Αλλά $-(\text{ημ}\theta)^2=(\text{συν}\theta)^2-1$.

Άρα

$$E^{'}(\theta)=2(\text{συν}\theta)^2+\text{συν}\theta-1$$

Η εξίσωση: $2\tau^2+\tau-1=0$ έχει ρίζες το -1 και το $\frac{1}{2}$.

Άρα

$$E^{'}(\theta)=2(\text{συν}\theta+1)\left(\text{συν}\theta-\frac{1}{2}\right)$$

Για $\theta\in(o,\pi)$ είναι $\text{συν}\theta+1>0$.

Η τριγωνομετρική εξίσωση: $\text{συν}\theta=\frac{1}{2}$ έχει στο $(0,\pi)$ τη ρίζα $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Είναι φανερό ότι:

- για $0<\theta<\frac{\pi}{3}$, $E^{'}(\theta)>0$
- για $\frac{\pi}{3}<\theta<\pi$, $E^{'}(\theta)<0$

Άρα στο $\theta=\frac{\pi}{3}$ η $E(\theta)$ παίρνει μέγιστη τιμή.

Γ.3.

Έχουμε ότι $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=\text{ημ}\frac{\pi}{3}\left(1+\text{συν}\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\cdot\sqrt{3}$.

Η συνάρτηση $E:\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\to\mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και:

$$E\left(\left(0,\frac{\pi}{3}\right)\right)=\left(\lim_{\theta\to0}E(\theta),\lim_{\theta\to\frac{\pi}{3}^-}E(\theta)\right)=\left(0,\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$$

Επειδή $0<\frac{3}{4}<\frac{3}{4}\sqrt{3}$, υπάρχει μοναδική $\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ με $E(\theta_1)=\frac{3}{4}$.

Η συνάρτηση $E: \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right) \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και:

$$E\left(\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right) = \left(\lim_{\theta \to \pi^-} E(\theta), \lim_{\theta \to \frac{\pi}{3}^+} E(\theta)\right) = \left(0, \frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$$

Επειδή $0 < \frac{3}{4} < \frac{3}{4}\sqrt{3}$, υπάρχει μοναδική $\theta_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ με $E(\theta_2) = \frac{3}{4}$.

Γ.4.

Από το ερώτημα Γ.3. ισχύει ότι $\theta_1 < \frac{\pi}{3} < \theta_2$.

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει γωνία ξ_1 , με $\theta_1 < \xi_1 < \frac{\pi}{3}$, ώστε $E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1)$.

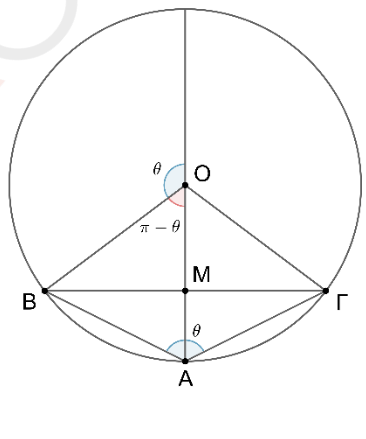
Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει γωνία ξ_2 , με $\frac{\pi}{3} < \xi_2 < \theta_2$,ώστε $E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) E'(\xi_2)$.

Αφού $E(\theta_1) = E(\theta_2) = \frac{3}{4}$, παίρνουμε ότι:

$$\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) E'(\xi_1) = -\left(\theta_2 - \frac{\pi}{3}\right) E'(\xi_2) = \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) E'(\xi_2)$$

Σχόλιο: 1) Υπάρχει ανακρίβεια στην εκφώνηση. Γράφει: $B\hat{O}M = \theta$ το οποίο δεν είναι ακριβές.

Εάν $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ τότε $B\hat{O}M = \pi - \theta$.



ΘΕΜΑ Δ

Δ.1.

$$f(x) = x\ln x - \ln\lambda - \ln x$$
$$f'(x) = \ln x + x\cdot\frac{1}{x} - \frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$$

Έχουμε: $f'(1) = 0$.

- Αν $x > 1$τότε $1 - \frac{1}{x} > 0$και $\ln x > 0$.

  Άρα για $x > 1$, $f'(x) > 0$.

- Αν $0 < x < 1$τότε $1 - \frac{1}{x} < 0$και $\ln x < 0$.

  Άρα για $0 < x < 1$, $f'(x) < 0$.

Άρα f ↗(γνησίως αύξουσα) στο $[1, \infty)$

και

f ↘ (γνησίως φθίνουσα) στο $(0,1]$.

Συνεπώς η fπαρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = 1$, το $f(1) = -\ln\lambda$.

Το σημείο ακροτάτου της fείναι το $(1, -\ln\lambda)$. Καθώς το λ μεταβάλλεται στο $(0, +\infty)$, η ευθεία είναι η $x = 1$.

Δ.2.

<u>1ος τρόπος</u>:

Η δοσμένη σχέση $x^x \geq \lambda x$ για $x > 0$ γράφεται: $x^{x-1} \geq \lambda$.

Θέτουμε $q(x) = x^{x-1} = e^{(x-1)\ln x}$ με $x > 0$.

Έχουμε: $q'(x) = x^{x-1}\left[\ln x + \frac{x-1}{x}\right]$ με $x > 0$.

Επιπλέον $x^{x-1} > 0$για $x > 0$και:

- Αν $x > 1$είναι $\ln x > 0$και $\frac{x-1}{x} > 0$.

  Άρα για $x > 1$, έχουμε $q'(x) > 0$.

- Αν $0 < x < 1$είναι $\ln x < 0$και $\frac{x-1}{x} < 0$.

  Άρα για $0 < x < 1$, έχουμε $q'(x) < 0$.

Συνεπώς η συνάρτηση q παίρνει ελάχιστη τιμή στο $x = 1$, η οποία είναι $q(1) = 1^0 = 1$.

Άρα $q(x) \geq 1$για $x > 0$.

Αφού θέλουμε $q(x) \geq \lambda$, η μεγαλύτερη τιμή του λ που επαληθεύει αυτή τη σχέση είναι το $\lambda = 1$.

2ος τρόπος (Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $e^t \geq 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}$):

$$x^{x-1} \geq \lambda$$

$$x^{x-1} = e^{(x-1)\ln x} \geq 1 + (x-1)\ln x$$

Αλλά για $x > 0$ έχουμε $(x-1)\ln x \geq 0$.

Άρα $x^{x-1} \geq 1$ για $x > 0$ και για $x = 1$έχουμε ισότητα. Άρα $\lambda = 1$.

Δ.3.

Η εφαπτόμενη της C_h στο $\left(x_0, h(x_0)\right)$είναι $y = h(x_0) + h'(x_0)(x - x_0)$.

Για να περνάει από το σημείο (0,0) πρέπει $0 = h(x_0) - x_0 h'(x_0)$.

Δηλαδή πρέπει η $h(x) = xh'(x)$να έχει ρίζα.

Εδώ έχουμε την $g(x)$, δηλαδή την εξίσωση: $g(x) = xg'(x)$.

Συγκεκριμένα:

$$g(x) = x^x = e^{x\ln x}$$
$$g'(x) = x^x(\ln x + 1)$$

Άρα η εξίσωση $g(x) = xg'(x)$γίνεται:

$$x^x = x^x(1 + \ln x)x$$
$$x(1 + \ln x) = 1$$
$$x + x\ln x - 1 = 0$$

Θέτουμε $r(x) = x + x\ln x - 1$.

- Για $x > 1$, είναι $r(x) > 0$.
- Για $x < 1$, είναι $r(x) < 0$.
- Για $x = 1$, είναι $r(1) = 0$.

Άρα το μοναδικό σημείο για το οποίο $r(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = xg'(x)$ είναι το $x = 1$.

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο $(1, g(1))$είναι:

$$y = g(1) + g'(1)(x-1) = 1 + 1(x-1) = x$$

Και αφού $\lambda = 1$,

είναι πράγματι η $y = x$.

Δ.4.

(i)

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}$$

Αλλά :

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$$

Λόγω συνέχειας της e^xείναι:

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

Άρα $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 1 = h(0)$οπότε είναι συνεχής.

(ii)

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\mu(x) = x^{2020}\left(3 - 2\int_1^2 g(t)dt\right) + (1-x)\int_0^1 h(1-t)dt$$

που είναι συνεχής.

Επίσης

$$\mu(0) = \int_0^1 h(1-t)dt = \int_0^1 h(t)dt > 0$$

γιατί $h(x) > 0$ για $x \geq 0$.

Είναι

$$\mu(1) = 3 - 2\int_1^2 g(t)dt$$

Είναι $g(t) = t^t \geq t$ για $t > 1$.

Άρα

$$\int_1^2 g(t)dt > \int_1^2 tdt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

δηλαδή

$$\mu(1) < 3 - 2 \cdot \frac{3}{2} = 0$$

Αφού $\mu(0) \cdot \mu(1) < 0$,

το Θεώρημα Bolzano μάς δίνει ότι η εξίσωση $\mu(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1)$.