

Θέμα Α

A.1. Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 76

A.2. Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 104

A.3. α) Ψευδής

β) Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 136

A.4. α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) ;

Παρατήρηση: Το Σχολικό Βιβλίο στη σελίδα 76 γράφει στο κάτω - κάτω πλαίσιο

«Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μίας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f , είναι διάστημα».

Εάν το λάβουμε αυτό υπ' όψιν, τότε η πρόταση (δ) είναι Σωστή.

Όμως, δεν είναι ακριβές αυτό, διότι εάν πάρουμε:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = (|x| - x) \cdot x$$

Τότε η f είναι συνεχής μη σταθερή, με $f(x) = 0$ για $x \geq 0$.

Το $f\{[0, 1]\} = \{0\}$ με βάση το Σχολικό Βιβλίο δεν είναι διάστημα.

ε) Σωστό.

Θέμα Β

Β.1.

Έχουμε τη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία ορίζεται η $f \circ g$ πρέπει να ικανοποιούν την

$$g(x) \in (1, \infty).$$

Δηλαδή $e^x > 1$.

$$\text{Αλλά } e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

Άρα η $f \circ g: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και

$$(f \circ g)(x) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

Β.2. Έχουμε τη συνάρτηση $h(x) = (f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$.

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$h'(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \frac{e^x \cdot (e^x - 1) - (e^x + 2) \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x} - 2e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Άρα, για $x > 0$, είναι $h'(x) < 0$,

οπότε h είναι γνησίως φθίνουσα οπότε είναι και «1-1».

Για να βρούμε την αντίστροφη ενεργούμε ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} &= y \Leftrightarrow e^x + 2 - ye^x + y = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow e^x(1 - y) &= -(y + 2) \Leftrightarrow e^x = \frac{y + 2}{y - 1} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{y + 2}{y - 1}\right) \end{aligned}$$

Άρα $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x + 2}{x - 1}\right)$ με πεδίο ορισμού της φ να είναι το πεδίο τιμών της h .

Η $h:(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε:

$$h(0, \infty) = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} h(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) \right)$$

Έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$

Εάν $u = e^x$ τότε για $x \rightarrow \infty$ έχουμε ότι $u \rightarrow \infty$

Οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{u + 2}{u - 1} = 1$$

• Έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x + 2}{e^x - 1} = \infty$

διότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + 2) = 1 + 2 = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{e^x - 1} = +\infty$

αφού για $x > 0$ είναι

$$e^x - 1 > 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x - 1) = 0$$

B.3. Έχουμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

και παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left[\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) \right]' = \frac{\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'}{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{\frac{(x+2)' \cdot (x-1) - (x+2) \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}}{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{1 \cdot (x-1) - (x+2) \cdot 1}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2} = \frac{-3 \cdot (x-1)}{(x-1)^2 \cdot (x+2)} = \frac{-3}{(x-1) \cdot (x+2)} < 0, \text{ για } x > 1 \end{aligned}$$

Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως φθίνουσα.

B.4.

- Έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

Εάν $u = \frac{x+2}{x-1}$ τότε για $x \rightarrow 1^+$ έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = \infty$

Αρα

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty$$

- Έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$

Εάν $u = \frac{x+2}{x-1}$ τότε για $x \rightarrow +\infty$ έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x-1} = 1$

Αρα

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = \ln 1 = 0$$

Θέμα Γ

Έχουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} - \ln \lambda, & \text{εάν } x \leq 0 \\ \eta \mu x + \lambda \cdot \sigma \upsilon \nu x, & \text{εάν } 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Γ.1.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής για $x < 0$ και για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$.

Πρέπει να δούμε εάν είναι συνεχής και για $x = 0$.

Έχουμε ότι $f(0) = 1 - \ln \lambda$

και

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\eta \mu x + \lambda \cdot \sigma \upsilon \nu x) = \eta \mu 0 + \lambda \cdot \sigma \upsilon \nu 0 = 0 + \lambda \cdot 1 = \lambda$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 - \ln \lambda$$

Η συνάρτηση f είναι λοιπόν συνεχής εάν και μόνο εάν

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ δηλαδή } 1 - \ln \lambda = \lambda.$$

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$x + \ln x - 1 = 0, \text{ με } x > 0$$

για την οποία θα δείξουμε ότι έχει μοναδική ρίζα το $x = 1$.

Α' Τρόπος Λύσης:

Έχουμε ότι $\lambda + \ln \lambda - 1 = 0$, και διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

- Εάν $\lambda = 1$, τότε η σχέση ισχύει.
- Εάν $\lambda > 1$, τότε $\lambda - 1 > 0$ και άρα $\ln \lambda > 0$. Οπότε $\lambda + \ln \lambda - 1 > 0$
- Εάν $\lambda < 1$, τότε $\lambda - 1 < 0$ και άρα $\ln \lambda < 0$. Οπότε $\lambda + \ln \lambda - 1 < 0$

Οπότε, η σχέση $\lambda + \ln \lambda - 1 = 0$ ισχύει εάν και μόνο εάν $\lambda = 1$.

Β' Τρόπος Λύσης:

Θέτουμε: $q(x) = x + \ln x - 1$, με $x > 0$ και παραγωγίζοντας έχουμε ότι:

$$q'(x) = (x + \ln x - 1)' = 1 + \frac{1}{x} > 0, \text{ συνεπώς η συνάρτηση } q \text{ είναι γνησίως αύξουσα.}$$

$$\text{Υπολογίζουμε } q\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \ln\left(\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{2} - \ln 2 - 1 = -\frac{1}{2} - \ln 2 < 0 \text{ και } q(2) = 2 + \ln 2 - 1 > 0$$

Από Θεώρημα Bolzano, η εξίσωση $q(x) = 0$ έχει λοιπόν μία ρίζα στο $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ και είναι μοναδική. Προφανώς είναι η $x = 1$, άρα $\lambda = 1$.

Γ.2.

Εάν $\lambda = 1$, τότε έχουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{εάν } x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & \text{εάν } 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

- Εάν $x < 0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{1}{1-x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \cdot 1}{x \cdot (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-0} = 1$$

- Εάν $x > 0$, τότε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \\ &= 1 + 0 = 1 \end{aligned}$$

$$\text{Άρα: } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 1.$$

$$\text{Άρα } f'(0) = 1.$$

Αν ω είναι η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη στο 0 της f με τον άξονα x' τότε είναι

$$\epsilon\phi\omega = f'(0) = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \epsilon\varphi\omega = \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\text{Αφού } 0 \leq \omega < \pi, \text{ παίρνουμε } \omega = \frac{\pi}{4}$$

Γ.3.

Εάν $\lambda = 1$, τότε έχουμε τη συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x}, & \text{εάν } x \leq 0 \\ \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x, & \text{εάν } 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

• Για $x < 0$, τότε:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \frac{(1)' \cdot (1-x) - 1 \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{0 \cdot (1-x) - 1 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} > 0, \quad x \neq 1$$

• Για $x > 0$, τότε:

$$f'(x) = (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)' = (\eta\mu x)' + (\sigma\upsilon\nu x)' = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$$

Οπότε, έχουμε:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2}, & \text{εάν } x \leq 0 \\ 1, & \text{εάν } x = 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x, & \text{εάν } 0 < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Για $x \leq 0$, είναι $f'(x) > 0$ και για $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ έχουμε το ακόλουθο:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = 0,$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x = \frac{5\pi}{4}.$$

Επειδή είναι $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ και τα δυο είναι δεκτά.

Αφού η f' ορίζεται για κάθε $x < \frac{3\pi}{2}$ και ακόμη ισχύει ότι $f'(x) = 0$ μόνο για

$$x = \frac{\pi}{4} \text{ και } x = \frac{5\pi}{4}$$

αυτά είναι τα κρίσιμα σημεία.

Να σημειώσουμε ότι επειδή το πεδίο ορισμού είναι ανοικτό δεν παίρνουμε τα άκρα.

Γ.4.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$ είναι η:

$$y - f(\alpha) = f'(\alpha) \cdot (x - \alpha)$$

- Εάν $y = 0$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} 0 - f(\alpha) &= f'(\alpha) \cdot (x - \alpha) \Leftrightarrow f'(\alpha) \cdot (x - \alpha) = -f(\alpha) \Leftrightarrow f'(\alpha) \cdot x - f'(\alpha) \cdot \alpha = -f(\alpha) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow f'(\alpha) \cdot x = f'(\alpha) \cdot \alpha - f(\alpha) \Leftrightarrow \frac{f'(\alpha) \cdot x}{f'(\alpha)} = \frac{f'(\alpha) \cdot \alpha - f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \frac{f'(\alpha) \cdot \alpha - f(\alpha)}{f'(\alpha)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} \end{aligned}$$

γιατί το $f'(\alpha)$ δεν μηδενίζεται όταν το $x < 0$ ή $x = 0$.

Οπότε, έχουμε το σημείο: $B\left(\alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)}, 0\right)$

- Άρα, η τετμημένη x του σημείου B είναι η:

$$x_B = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha - \frac{1}{\frac{1-\alpha}{(1-\alpha)^2}} = \alpha - \frac{(1-\alpha)^2 \cdot 1}{(1-\alpha) \cdot 1} = \alpha - (1-\alpha) = 2\alpha - 1$$

Τελικά για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t , ισχύει ότι:

$$x_B(t) = 2\alpha(t) - 1 \Rightarrow x_B'(t) = 2\alpha'(t) - (1)' \Rightarrow x_B'(t) = 2 \cdot \left[\frac{-a(t)}{3} \right] \Rightarrow x_B'(t) = \frac{-2a(t)}{3}$$

Αφού όμως $\alpha(t_0) = -1$, για $t = t_0$ είναι:

$$x_B'(t_0) = \frac{-2 \cdot a(t_0)}{3} = \frac{-2 \cdot (-1)}{3} = +\frac{2}{3} \text{ μονάδες}$$

Θέμα Δ

Έχουμε τη συνάρτηση: $f(x) = e^x + x^2 - e \cdot x - 1$

Δ.1. Παραγωγίζοντας έχουμε ότι:

$$f'(x) = (e^x + x^2 - e \cdot x - 1)' = e^x + 2x - e \cdot 1 - 0 = e^x + 2x - e$$

$$\text{και } f''(x) = (e^x + 2x - e)' = e^x + 2 \cdot 1 - 0 = e^x + 2 > 0$$

Αφού $f''(x) > 0$

τότε η $f'(x) = 0$ έχει το πολύ 1 ρίζα στο σύνολο $\mathbb{R}$.

Η $f'(x)$ είναι συνεχής και $f'(0) = 1 - e < 0$, $f'(1) = 2$

- Από το Θεώρημα Bolzano αφού η $f'(x)$ είναι συνεχής, η $f'(x) = 0$ έχει τουλάχιστον 1 ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$. Αφού έχει το πολύ 1 ρίζα στο σύνολο $\mathbb{R}$, άρα θα έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.
- Επειδή $f''(x) > 0$, τότε η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα εάν x_0 είναι η ρίζα θα είναι $f'(x) > f'(x_0) = 0$ για κάθε $x > x_0$

και $f'(x) < f'(x_0) = 0$ για κάθε $x < x_0$.

Έτσι στο x_0 η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι και ολικό, αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$ και f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$.

Είναι

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1$$

Αλλά $f'(x_0) = 0$

$$\text{δηλα } f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 = x_0^2 - (e+2) \cdot x_0 + e - 1$$

δή

$$e^{x_0} + 2x_0 - e = 0, \text{ άρα } e^{x_0} = e - 2x_0$$

Έτσι:

$$f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - e \cdot x_0 - 1 = x_0^2 - (e + 2) \cdot x_0 + e - 1$$

Δ.2.

Α' Τρόπος Λύσης:

Έχουμε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0$, λόγω της συνέχειας της συνάρτησης f .

Επίσης: $f(x) - f(x_0) > 0$, για $x \neq x_0$

Από γνωστή ιδιότητα συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$$

Αλλά:

$$-1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)} \leq \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$$

και επειδή $\lim_{x \rightarrow x_0} \left[-1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}\right] = +\infty$, άρα έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] = +\infty$$

Β' Τρόπος Λύσης:

Έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] \right\}$$

1^η περίπτωση: Εάν $x > x_0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{x - x_0} = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$$

Συμπεραίνουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$, όταν το x λαμβάνει τιμές κοντά στο x_0 .

Οπότε, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = +\infty$$

Ακόμη είναι: $-1 \leq \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \leq 1$, λόγω του ότι για κάθε γωνία θ είναι $-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1$. Οπότε:

$$-1 \cdot (x - x_0) \leq (x - x_0) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \leq 1 \cdot (x - x_0)$$

από όπου προκύπτει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} [-(x - x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - x_0) = 0$

Εν τέλει από Κριτήριο Παρεμβολής αποφαινόμαστε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} (x - x_0) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) = 0$

Τελικά:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \cdot \eta\mu \left(\frac{1}{x - x_0} \right) \right] \right\} = +\infty$$

2^η περίπτωση: Εάν $x < x_0$, τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{x - x_0} = -\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = 0$$

Συμπεραίνουμε από το προηγούμενο ερώτημα ότι για κάθε $x \in (-\infty, x_0)$ είναι $f'(x) < 0$, όταν το x λαμβάνει τιμές κοντά στο x_0 .

Οπότε, έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = -\infty$$

Ακόμη είναι: $-1 \leq \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq 1$, λόγω του ότι για κάθε γωνία θ είναι $-1 \leq \eta\mu\theta \leq 1$. Οπότε:

$$-1 \cdot (x - x_0) \geq (x - x_0) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \geq 1 \cdot (x - x_0) \Leftrightarrow x - x_0 \leq (x - x_0) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \leq -1 \cdot (x - x_0)$$

από όπου προκύπτει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} [-(x - x_0)] = 0$

Εν τέλει από Κριτήριο Παρεμβολής αποφαινόμεστε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} (x - x_0) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) = 0$

Τελικά:

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] \right\} = (-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$$

Συμπέρασμα

Έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα για το ζητούμενο όριο μας:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left\{ \frac{1}{x - x_0} \cdot \left[\frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} + (x - x_0) \cdot \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_0}\right) \right] \right\} = +\infty$$

Δ.3.

Θέτουμε: $g(x) = f(x) + x - x_0$

και παραγωγίζοντας έχουμε ότι:

$$g'(x) = f'(x) + 1 - 0 = f'(x) + 1 > 0, \text{ για } x > x_0$$

Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $(x_0, 1)$, άρα η εξίσωση $g(x) = 0$, για $x \in (x_0, 1)$ έχει το πολύ μία ρίζα x_0 .

- Αλλά είναι $f(0) = 0$, άρα επειδή στη θέση x_0 η συνάρτηση f έχει ελάχιστο

$$g(x_0) = f(x_0) < f(0) = 0$$

- Ακόμη είναι $g(1) = f(1) + 1 - x_0 = e + 1 - e - 1 + 1 - x_0 = 1 - x_0 > 0$

Οπότε είναι $g(x_0) \cdot g(1) < 0$ και αφού η g είναι συνεχής, άρα από το Θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $(x_0, 1)$.

Επειδή η g είναι και γνησίως αύξουσα συνάρτηση, αυτή η ρίζα είναι και μοναδική.

Άρα υπάρχει $\rho \in (x_0, 1)$ με $g(\rho) = 0$, δηλαδή $f(\rho) = x_0 - \rho$

Δ.4.

Η σχέση $f(x_0) > f(\rho) \cdot [f'(\kappa) + 1]$ γράφεται ισοδύναμα ως ακολούθως:

$$f(x_0) - f(\rho) > f(\rho) \cdot f'(\kappa) \quad (1)$$

Αλλά $f(\rho) = x_0 - \rho$, οπότε η σχέση (1) γράφεται ισοδύναμα ως ακολούθως:

$$\frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa), \quad \text{με } x_0 - \rho < 0$$

Μέσω του Θεωρήματος Μέσης Τιμής Διαφορικού Λογισμού, έχουμε ότι:

$$\frac{f(x_0) - f(\rho)}{x_0 - \rho} = f'(\xi), \quad \text{με } x_0 < \xi < \rho$$

Άρα, πρέπει: $f'(\xi) < f'(\kappa)$

Αλλά η f' είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $(x_0, +\infty)$, οπότε αφού $x_0 < \xi < \rho$, τότε είναι:

$$f'(\xi) < f'(\rho) < f'(\kappa), \text{ για } \kappa \in (\rho, 1)$$

που δείχνει τη ζητούμενη σχέση.