

Μάθημα: Ρίζες πραγματικών αριθμών – Επαναληπτικό**Ημερομηνία: 13-4-20****Ασκήσεις για το σπίτι - Λύσεις****Άσκηση 1**

Έστω $A = \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{50} + \sqrt{75}$, $B = \sqrt{18} - \sqrt{27} - \sqrt{32} + \sqrt{48}$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:

α) A β) B γ) $A \cdot B$ δ) $\frac{A}{B}$ ε) $\frac{1}{A} + \frac{1}{B}$

Λύση

$$\begin{aligned}\alpha) A &= \sqrt{8} - \sqrt{12} - \sqrt{50} + \sqrt{75} = \\ &= \sqrt{4}\sqrt{2} - \sqrt{4}\sqrt{3} - \sqrt{25}\sqrt{2} + \sqrt{25}\sqrt{3} = \\ &= 2\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 5\sqrt{3} = -3\sqrt{2} + 3\sqrt{3} = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta) B &= \sqrt{18} - \sqrt{27} - \sqrt{32} + \sqrt{48} = \\ &= \sqrt{9}\sqrt{2} - \sqrt{9}\sqrt{3} - \sqrt{16}\sqrt{2} + \sqrt{16}\sqrt{3} = \\ &= 3\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 4\sqrt{2} + 4\sqrt{3} = -\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{3} - \sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma) A \cdot B &= 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 3(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = \\ &= (\sqrt{3})^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = 3$$

$$\delta) \frac{1}{A} = \frac{1}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3(\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3(3-2)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3}$$

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2)} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{(3-2)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1} = \sqrt{3} + \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{A} + \frac{1}{B} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3} + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) = \frac{4(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3}$$

Άσκηση 2 : Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \sqrt[3]{72 - 2\sqrt{11 + \sqrt{25}}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[3]{72 - 2\sqrt{11 + \sqrt{25}}} = \sqrt[3]{72 - 2\sqrt{11 + 5}} = \\ &= \sqrt[3]{72 - 2\sqrt{16}} = \sqrt[3]{72 - 8} = \sqrt[3]{64} = 4 \end{aligned}$$

Άσκηση 3: Αν $x = 1 - 2\sqrt{5}$, $y = 1 + 2\sqrt{5}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = x^2 - xy + y^2$.

Λύση

$$x^2 = (1 - 2\sqrt{5})^2 = 1 - 4\sqrt{5} + 20 = 21 - 4\sqrt{5}$$

$$y^2 = (1 + 2\sqrt{5})^2 = 1 + 4\sqrt{5} + 20 = 21 + 4\sqrt{5}$$

$$xy = (1 - 2\sqrt{5})(1 + 2\sqrt{5}) = 1^2 - (2\sqrt{5})^2 = 1 - 20 = -19$$

$$A = 21 - 4\sqrt{5} - (-19) + 21 + 4\sqrt{5} = 21 + 19 + 21 = 61$$

Άσκηση 4: Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt[4]{3^3\sqrt{3\sqrt{3}}}$.

α. Να γράψετε την A με τη βοήθεια μίας ρίζας.

β. Να μετατρέψετε το $\frac{1}{A}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

Λύση

$$\alpha. A = \sqrt[4]{3^3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3^3\sqrt{3^2 \cdot 3}} = \sqrt[4]{3^6\sqrt{3}} = \sqrt[4]{\sqrt[6]{3^6\sqrt{3}}} = \sqrt[24]{3^9} = \sqrt[8]{3^3}$$

β' τρόπος:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[4]{3^3\sqrt{3\sqrt{3}}} = \sqrt[4]{3^3\sqrt{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt[4]{3^3\sqrt{3^{\frac{3}{2}}}} = \sqrt[4]{3 \cdot 3^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \sqrt[4]{3 \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \sqrt[4]{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{\frac{3}{8}} = \sqrt[8]{3^3} \end{aligned}$$

$$\beta. \frac{1}{A} = \frac{1}{\sqrt[8]{3^3}} = \frac{\sqrt[8]{3^5}}{\sqrt[8]{3^3} \sqrt[8]{3^5}} = \frac{\sqrt[8]{3^5}}{\sqrt[8]{3^8}} = \frac{\sqrt[8]{3^5}}{3}$$

Άσκηση 5 : Ναδειχθεί ότι: $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}} = \frac{7}{2}$.

Λύση

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}-\sqrt{7}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{11}+\sqrt{7}} &= \frac{\sqrt{7}(\sqrt{11}+\sqrt{7}) - \sqrt{7}(\sqrt{11}-\sqrt{7})}{(\sqrt{11}-\sqrt{7})(\sqrt{11}+\sqrt{7})} = \\ &= \frac{\sqrt{77} + \sqrt{7}^2 - \sqrt{77} + \sqrt{7}^2}{\sqrt{11}^2 - \sqrt{7}^2} = \frac{14}{11-7} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Άσκηση 6 :

α. Να υπολογιστεί το $(2 - \sqrt{3})^2$.

β. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$.

Λύση

$$\alpha. (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$\beta. \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} \stackrel{(\alpha)}{=} \sqrt{(2 - \sqrt{3})^2} = |2 - \sqrt{3}| = 2 - \sqrt{3}$$

Άσκηση 7: Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να απλοποιηθεί η τιμή της:

$$A = \sqrt[10]{\alpha^3 \beta^9} \cdot \sqrt{\sqrt[5]{\alpha^7 \beta^{11}}}$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \sqrt[10]{\alpha^3 \beta^9} \cdot \sqrt{\sqrt[5]{\alpha^7 \beta^{11}}} = \sqrt[10]{\alpha^3 \beta^9} \cdot \sqrt[10]{\alpha^7 \beta^{11}} = \\ &= \sqrt[10]{\alpha^{10} \beta^{20}} = \alpha \sqrt[10]{(\beta^2)^{10}} = \alpha \beta^2 \end{aligned}$$

Άσκηση 8: Αν $x \in (-2, 1)$ να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} - \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}{x + 1}.$$

Λύση

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{(x + 2)^2}}{x + 2} - \frac{\sqrt{(x + 1)^2}}{x + 1} = \frac{|x + 2|}{x + 2} - \frac{|x + 1|}{x + 1} = \\ &= \frac{x + 2}{x + 2} - \frac{-(x + 1)}{x + 1} = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Αφού: $-2 < x < 1$ οπότε:

$$x > -2 \Leftrightarrow x + 2 > 0 \text{ και } x < 1 \Leftrightarrow x - 1 < 0$$

Άσκηση 9: Να βρεθεί το εξαγόμενο της παράστασης:

$$\sqrt[9]{11} \cdot \sqrt{11^3} \cdot \sqrt[3]{11^4}$$

Λύση

$$\sqrt[9]{11} \cdot \sqrt{11^3} \cdot \sqrt[3]{11^4} = 11^{\frac{1}{9}} \cdot 11^{\frac{3}{2}} \cdot 11^{\frac{4}{3}} = 11^{\frac{1}{9} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3}} = 11^{\frac{2+27+24}{18}} = 11^{\frac{53}{18}}$$

=

$$= \sqrt[18]{11^{53}} = \sqrt[18]{11^{36}} \cdot \sqrt[18]{11^{17}} = 11^2 \sqrt[18]{11^{17}} = 121 \sqrt[18]{11^{17}}$$

Β' τρόπος

$$\begin{aligned} \sqrt[9]{11} \cdot \sqrt{11^3} \cdot \sqrt[3]{11^4} &= \sqrt[9 \cdot 2]{11^2} \cdot \sqrt[2 \cdot 9]{11^{3 \cdot 9}} \cdot \sqrt[3 \cdot 6]{11^{4 \cdot 6}} = \\ &= \sqrt[18]{11^2} \cdot \sqrt[18]{11^{27}} \cdot \sqrt[18]{11^{24}} = \sqrt[18]{11^{2+27+24}} = \sqrt[18]{11^{53}} = \\ &= \sqrt[18]{11^{36}} \cdot \sqrt[18]{11^{17}} = 11^2 \sqrt[18]{11^{17}} = 121 \sqrt[18]{11^{17}} \end{aligned}$$