

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Η δέσμευση κεφαλαίων την παρούσα χρονική στιγμή με σκοπό την απόκτηση παραγωγικών στοιχείων ή αξιογράφων τα οφέλη των οποίων θα προκύψουν σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα στο μέλλον ονομάζεται **επένδυση**.
- Βασικό χαρακτηριστικό των επενδύσεων είναι ότι καταβάλλονται χρήματα την παρούσα χρονική στιγμή και εισπράττονται χρήματα από την επένδυση στο μέλλον.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

- Η **διαχρονική αξία του χρήματος** στηρίζεται στη λογική ότι ένα ευρώ σήμερα αξίζει περισσότερο από ένα ευρώ σε ένα χρόνο από σήμερα.
- Αν επενδύσουμε ένα ευρώ σήμερα τότε σε ένα χρόνο από σήμερα θα έχουμε ένα ευρώ συν τόκους ενώ αν το είχαμε αποθηκεύσει τότε θα είχαμε μόνο ένα ευρώ.
- Στόχος της μελέτης μας είναι η σύγκριση σημερινών με μελλοντικά χρηματικά ποσά να γίνεται σε μια ενιαία χρονική στιγμή έτσι ώστε αυτά να είναι συγκρίσιμα.

ΕΠΙΤΟΚΙΟ ΚΑΙ ΤΟΚΟΣ

- **Επιτόκιο** είναι η αμοιβή του κεφαλαίου για κάθε μονάδα χρόνου γι αυτόν που δανείζει κεφάλαια, ενώ αποτελεί παράλληλα το κόστος γι αυτόν που δανείζεται.
- Είναι ο λόγος του τόκου που αναλογεί σε μια περίοδο (συνήθως σε 1 έτος), δια του κεφαλαίου που επενδύθηκε στην αρχή της περιόδου, δηλαδή αν επενδύσουμε 1.000 ευρώ και σε ένα έτος λάβουμε τόκο 100 ευρώ τότε το επιτόκιο είναι $1.000/100 = 0,10$ ή 10%.

Η ΔΙΑΧΡΟΝΙΚΗ ΑΞΙΑ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΣ

- Η συνολική αξία με βάση το προηγούμενο παράδειγμα των 1.000 ευρώ στο τέλος του πρώτου έτους ή αλλιώς η Μελλοντική τους Αξία θα είναι 1.100 ευρώ.
- Αν επενδυθούν και πάλι με το ίδιο επιτόκιο για ένα έτος ακόμη τότε $1.100 + (1.100 \cdot 10\%) = 1.210$ ευρώ.
- Αν επενδυθούν και για τρίτο έτος με το ίδιο επιτόκιο τότε έχουμε $1.210 + (1.210 \cdot 10\%) = 1.331$ ευρώ.

Σημείωση: Ο τόκος του πρώτου έτους είναι 100 ευρώ ενώ του δεύτερου 110. Αυτό συμβαίνει γιατί τοκίστηκε και ο τόκος του πρώτου έτους ($100 \cdot 10\%$), οπότε είχαμε επένδυση με **ανατοκισμό**.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΜΑ ΕΠΕΝΔΥΣΗΣ

- Για τον υπολογισμό της Μελλοντικής Αξίας στο προηγούμενο παράδειγμα, εάν γνωρίζαμε εξ αρχής ότι η επένδυση είναι για 3 χρόνια με ετήσιο επιτόκιο 10% τότε θα κάναμε:
 $1.000 * (1,10) * (1,10) * (1,10) = 1.331$ ευρώ.
- Συνεπώς ο τύπος της Μελλοντικής Αξίας είναι:
 $ΜΑ = ΠΑ * (1+i)^ν$
όπου i το επιτόκιο και n ο αριθμός των ετών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Να υπολογιστεί η ΜΑ μιας επένδυσης 10.000 ευρώ για 2 έτη με ετήσιο επιτόκιο 15%.

Λύση

$$ΜΑ = 10.000 * (1+0,15)^2 = 13.225 \text{ ευρώ.}$$

ΠΑΡΟΥΣΑ ΑΞΙΑ (ΠΑ)

- Είναι η αντίστροφη διαδικασία που ακολουθήσαμε στη ΜΑ. Εδώ γνωρίζουμε τη ΜΑ και θέλουμε να βρούμε την αξία που αυτή έχει σήμερα.
- **Παρούσα Αξία** είναι το ποσό που απαιτείται να επενδυθεί σήμερα με δεδομένο επιτόκιο και για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα έτσι ώστε η ΜΑ του να καταστεί ίση με το δεδομένο μελλοντικό ποσό.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ποια πρέπει να είναι η ΠΑ 1.000 ευρώ τα οποία θα λάβουμε σε 2 χρόνια από σήμερα αν το ετήσιο επιτόκιο είναι 10% ?

Λύση

Έστω X το ποσό που πρέπει να επενδυθεί σήμερα τότε στο τέλος του πρώτου έτους θα έχουμε: $X * (1+0,10)$

Στο δεύτερο έτος θα έχουμε: $X * (1+0,10) + [X * (1+0,10) * 0,10]$

Δηλαδή πιο απλά: $X * (1+0,10)^2 = 1.000$ ευρώ

Λύνοντας ως προς X προκύπτει ότι $X = 826,446$ ευρώ

Συνεπώς η ΠΑ της επένδυσης για 2 έτη με ετήσιο επιτόκιο 10% και συνολική απόδοση 1.000 ευρώ είναι 826,446 ευρώ.

ΤΥΠΟΣ ΠΑ

- Ο τύπος της ΠΑ ενός μελλοντικού ποσού ΜΑ δίνεται από τη σχέση:

$$ΠΑ = \frac{ΜΑ}{(1+i)^ν}$$

όπου i το προεξοφλητικό επιτόκιο και $ν$ ο αριθμός των ετών.

Το $\frac{1}{(1+i)^ν}$ ονομάζεται συντελεστής προεξόφλησης και δίνει την ΠΑ μιας νομισματικής μονάδας που λαμβάνεται μετά από $ν$ έτη και προεξοφλείται με επιτόκιο i .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Να βρεθεί η ΠΑ τριετούς ομολόγου ονομαστικής αξίας 1.000 ευρώ και ετήσιο επιτόκιο 10% το οποίο στην λήξη του αποδίδει συνολικά 1.400 ευρώ.

Λύση

$$ΠΑ = \frac{1.400}{(1+0,10)^3} = 1.051,84 \text{ ευρώ}$$

ΠΑ ΣΕΙΡΑΣ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΠΟΣΩΝ

- Όταν έχουμε να υπολογίσουμε τις ΠΑ όχι μόνο ενός μελλοντικού ποσού αλλά περισσότερων λαμβανόμενα στο τέλος κάθε έτους για n έτη τότε υπολογίζουμε χωριστά την κάθε ΠΑ και στο τέλος τις προσθέτουμε.

- Τύπος:
$$ΠΑ = \sum_{v=1}^t \frac{ΜΑ}{(1+i)^v}$$

PANTEΣ

- **Ράντα** είναι ένας αριθμός συνεχών χρηματικών ποσών που καταβάλλονται (ή εισπράττονται) εντός ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος.
- Σημειώσεις:
 - Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών πληρωμών λέγεται περίοδος.
 - Η ράντα στην οποία η καταβολή γίνεται στο τέλος κάθε περιόδου ονομάζεται ληξιπρόθεσμη.
 - Η ράντα στην οποία η καταβολή γίνεται στην αρχή κάθε περιόδου ονομάζεται προκαταβλητέα.
 - Το ποσό που καταβάλλεται κάθε έτος λέγεται όρος της ράντας.

ΜΑ ΣΕΙΡΑΣ ΠΟΣΩΝ (ΡΑΝΤΑΣ)

- Μελλοντική αξία μιας ράντας είναι το άθροισμα όλων των σταθερών χρηματικών ποσών και ο ανατοκιζόμενος τόκος των ποσών αυτών που έχει συσσωρευτεί στο τέλος της σειράς.
- $MA = A \left[\frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$

Όπου: MA είναι η ράντα στο τέλος του n χρόνου

A είναι το περιοδικό χρηματικό ποσό

i είναι το επιτόκιο

n ο αριθμός των περιόδων της ράντας

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Ένας επενδυτής καταθέτει 2.000 ευρώ κάθε έτος για 3 έτη σε έναν τραπεζικό λογαριασμό με ετήσιο επιτόκιο 20%. Να υπολογιστεί το ποσό που θα έχει συγκεντρώσει στο τέλος του τρίτου έτους.

Λύση

$$MA = 2.000 \left[\frac{(1+0,20)^3 - 1}{0,20} \right] = 7.280 \text{ ευρώ.}$$

ΠΑ ΣΕΙΡΑΣ ΠΟΣΩΝ (ΡΑΝΤΑΣ)

- Παρούσα αξία μιας ράντας είναι το άθροισμα των παρούσων αξιών όλων των ποσών της σειράς και δίνεται από τη σχέση:

$$ΠΑ = A \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+i)^n}}{i} \right]$$

Σημειώνεται ότι ο όρος στην αγκύλη ονομάζεται συντελεστής παρούσας αξίας λαμβανομένης κάθε έτος για n έτη με προεξοφλητικό επιτόκιο i .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Θέλουμε να έχουμε 10.000 ευρώ κάθε έτος για τα επόμενα 3 χρόνια. Πόσα χρήματα απαιτείται να καταθέσουμε σήμερα σε τραπεζικό λογαριασμό αν το ετήσιο επιτόκιο είναι και θα παραμείνει στο 10%?

Λύση

$$ΠΑ = 10.000 \left[\frac{1 - \frac{1}{(1+0,10)^3}}{0,10} \right] = 24.868,60 \text{ ευρώ.}$$

ΔΙΗΝΕΚΗΣ ΣΕΙΡΑ ΠΟΣΩΝ

- Διηνεκής σειρά ποσών είναι μια σειρά καταβολών (ή εισπράξεων) οι οποίες πραγματοποιούνται κάθε έτος χωρίς λήξη δηλαδή στο διηνεκές (στο άπειρο).
- Η ΠΑ μιας ράντας στο διηνεκές δίνεται από τον τύπο:

$$ΠΑ = \frac{A}{i}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Να υπολογιστεί η ΠΑ 1.000 ευρώ λαμβανομένων κάθε έτος για πάντα. Το επιτόκιο προεξόφλησης είναι 10%.

Λύση

$$ΠΑ = \frac{1.000}{0,10} = 10.000 \text{ ευρώ.}$$

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΚΟΧΡΕΟΛΥΣΙΩΝ

- Εάν γνωρίζουμε την παρούσα αξία και θέλουμε να μάθουμε τη σειρά των σταθερών χρηματικών ποσών που απαιτούνται τότε απλά λύνουμε τον τύπο της ΠΑ της ράντας ως προς A δηλαδή:

$$A = \frac{\text{ΠΑ}}{\left[1 - \frac{1}{(1+i)^n} \right] \cdot i}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

- Μια επιχείρηση δανείζεται σήμερα 10.000 ευρώ. Το επιτόκιο είναι 10% και η εξόφληση θα γίνει σε 3 ισόποσες δόσεις. Να υπολογιστεί η κάθε δόση συμπεριλαμβανομένων των τόκων.

Λύση

$$A = \frac{10.000}{\left[\frac{1 - \frac{1}{(1+0,10)^3}}{0,10} \right]} = 4.020,91 \text{ ευρώ.}$$

Πίνακας Απόσβεσης Δανείου

Τόκος = ανεξόφλητο κεφάλαιο * επιτόκιο

Χρεολύσιο = Δόση – Τόκος

Ανεξόφλητο τέλους έτους = Ανεξόφλητο αρχής έτους – Χρεολύσιο

Στο παράδειγμα μας για το πρώτο έτος έχουμε:

Τόκος = $10.000 * 10\% = 1000$

Χρεολύσιο = $4.020,91 - 1.000 = 3.020,91$

Ανεξόφλητο τέλους έτους = $10.000 - 3.020,91 = 6.979,09$

Για το δεύτερο έτος έχουμε:

Τόκος = $6.979,09 * 10\% = 697,909$

Χρεολύσιο = $4.020,91 - 697,909 = 3.323,001$

Ανεξόφλητο τέλους έτους = $6.979,09 - 3.323,001 = 3.656,089$

Με τον ίδιο τρόπο για το τρίτο και τελευταίο έτος.

Το άθροισμα των χρεολυσίων θα πρέπει να κάνει 10.000 και το ανεξόφλητο ποσό στο τέλος του τελευταίου έτους θα πρέπει να είναι μηδέν.

Σημείωση: Μην επαληθεύσετε το συγκεκριμένο πρόχειρο παράδειγμα κατανόησης καθώς περιέχει στρογγυλοποιήσεις για λόγους κατανόησης. Στις ασκήσεις η επαλήθευση θα βγαίνει πάντα.