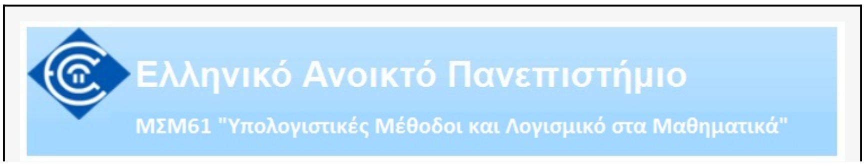


1η Γραπτή Εργασία

Άσκηση 1

Ερώτημα (α)

Άσκηση 1/σελίδα 16

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

α) Εδώ θα χρειαστεί να πάρουμε την περίπτωση το α>0, αλλιώς δεν συγκλίνει σύμφωνα με το Mathematica το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

In[∘]:=
```
Integrate[x * Exp[-α * x], {x, 0, +Infinity}, Assumptions → α > 0]
```
αόριστο ολοκλ··· εκθετική συνάρτηση άπειρο υποθέσεις

Out[∘]=
$$\frac{1}{\alpha^2}$$

β)

In[∘]:=
```
Integrate[x^2 * Cos[k * x], x]
```
αόριστο ολοκλή··· συνημίτονο

Out[∘]=
$$\frac{2\,x\,\mathrm{Cos}[k\,x]}{k^2} + \frac{\left(-2 + k^2 x^2\right)\mathrm{Sin}[k\,x]}{k^3}$$

γ)

In[∘]:=
```
Integrate[Cos[x] * Exp[-x^2], {x, -Infinity, +Infinity}]
```
αόριστο ολ··· συνημίτ··· εκθετική συνάρτηση άπειρο άπειρο

Out[∘]=
$$\frac{\sqrt{\pi}}{e^{1/4}}$$

δ) Εδώ θα χρειαστεί να πάρουμε την περίπτωση το α>0, αλλιώς δεν συγκλίνει σύμφωνα με το Mathematica το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

In[ ]:=
```
Integrate[x^4 * Exp[-α * x^2], {x, -Infinity, +Infinity}, Assumptions → α > 0]
```
αόριστο ολοκλή⋯ εκθετική συνάρτηση άπειρο άπειρο υποθέσεις

Out[ ]=
$$\frac{3\sqrt{\pi}}{4\,\alpha^{5/2}}$$

ε) Εδώ θα χρειαστεί να πάρουμε την περίπτωση το α πραγματικός μη μηδενικός, αλλιώς δεν συγκλίνει σύμφωνα με το Mathematica το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

In[ ]:=
```
Integrate[1/(Sqrt[x^2 + α^2]), {x, -1, 1}, Assumptions → α ∈ Reals && α ≠ 0]
```
αόριστο ολοκλή⋯ τετραγωνική ρίζα υποθέσεις πεδίο πραγματικών

Out[ ]=
$$\text{Log}\left[\frac{2+\alpha^2+2\sqrt{1+\alpha^2}}{\alpha^2}\right]$$

στ) Εδώ θα χρειαστεί να πάρουμε την περίπτωση το α πραγματικός, αλλιώς δεν συγκλίνει σύμφωνα με το Mathematica το γενικευμένο ολοκλήρωμα.

In[ ]:=
```
Integrate[1/(x^2 + α^2)^2, {x, 0, +Infinity}, Assumptions → α ∈ Reals]
```
αόριστο ολοκλήρωμα άπειρο υποθέσεις πεδίο πρ

Out[ ]=
$$\frac{\pi\,\text{Abs}[\alpha]}{4\,\alpha^4}$$

Άσκηση 2/σελίδα 16

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

α)

In[ ]:=
```
TableForm[Table[D[x * Exp[-x], {x, k}], {k, 0, 2}],
 TableHeadings → {{"Συνάρτηση", "1η Παράγωγος", "2η Παράγωγος"}, None}]
```
μορφή ορθ⋯ πίνα⋯ μερ⋯ εκθετική συνάρτηση
κεφαλίδες πίνακα κανένα

Out[ ]//TableForm=

Συνάρτηση	$e^{-x}\,x$
1η Παράγωγος	$e^{-x} - e^{-x}\,x$
2η Παράγωγος	$-2\,e^{-x} + e^{-x}\,x$

β)

In[ ]:=
```
TableForm[Table[D[x * Log[x], {x, k}], {k, 0, 2}],
 TableHeadings → {{"Συνάρτηση", "1η Παράγωγος", "2η Παράγωγος"}, None}]
```
μορφή ορθ⋯ πίνα⋯ μερ⋯ λογάριθμος
κεφαλίδες πίνακα κανένα

Out[ ]//TableForm=

Συνάρτηση	x Log[x]
1η Παράγωγος	1 + Log[x]
2η Παράγωγος	$\frac{1}{x}$

γ)

In[ ]:=
```
TableForm[Table[D[Sin[Exp[x]], {x, k}], {k, 0, 2}],
 TableHeadings → {{"Συνάρτηση", "1η Παράγωγος", "2η Παράγωγος"}, None}]
```
μορφή ορθ··· πίνα··· ·· ημ··· εκθετική συνάρτηση
κεφαλίδες πίνακα κανένα

Out[ ]//TableForm=

Συνάρτηση	$\mathrm{Sin}[e^x]$
1η Παράγωγος	$e^x \mathrm{Cos}[e^x]$
2η Παράγωγος	$e^x \mathrm{Cos}[e^x] - e^{2x} \mathrm{Sin}[e^x]$

δ)

In[ ]:=
```
TableForm[Table[D[Tanh[x], {x, k}], {k, 0, 2}],
 TableHeadings → {{"Συνάρτηση", "1η Παράγωγος", "2η Παράγωγος"}, None}]
```
μορφή ορθ··· πίνα··· ·· υπερβολική εφαπτομένη
κεφαλίδες πίνακα κανένα

Out[ ]//TableForm=

Συνάρτηση	$\mathrm{Tanh}[x]$
1η Παράγωγος	$\mathrm{Sech}[x]^2$
2η Παράγωγος	$-2\,\mathrm{Sech}[x]^2\,\mathrm{Tanh}[x]$

Άσκηση 3/ σελίδα 17

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

α)

In[ ]:=
```
Sum[1/n^6, {n, 1, +Infinity}]
```
άθροιση άπειρο

Out[ ]=
$$\frac{\pi^6}{945}$$

β)

In[ ]:=
```
Sum[n, {n, 1, N}]
```
άθροιση αριθ

Out[ ]=
$$\frac{1}{2} N (1 + N)$$

γ)

In[ ]:=
```
Sum[n^2, {n, 1, N}]
```
άθροιση αριθ

Out[ ]=
$$\frac{1}{6} N (1 + N) (1 + 2 N)$$

δ)

In[ ]:=
```
Sum[n^3, {n, 1, N}]
```
άθροιση αριθ

Out[ ]=
$$\frac{1}{4} N^2 (1 + N)^2$$

ε)

In[ ]:=
```
Sum[1 / Factorial[n], {n, 0, +Infinity}]
```
άθροιση παραγοντικό άπειρο

Out[ ]= e

στ)

In[ ]:=
```
Sum[1 / (Factorial[n])^2, {n, 0, Infinity}]
```
άθροιση άπειρο

Out[ ]=
```
BesselI[0, 2]
```

Ερώτημα (β)

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

(α)

In[ ]:=
```
ParametricPlot[{Cos[2 t], 3 * Sin[2 t]}, {t, 0, Pi}]
```
παραμετρικό διάγρ··· συνημίτονο ημίτονο π

(β)

In[ ]:=
```
ParametricPlot[{Exp[-t / 10] * Cos[t], Exp[-t / 10] * Sin[t]}, {t, 0, 6 Pi}]
```
παραμετρικό διάγρ··· εκθετική συνάρ··· συνημίτ··· εκθετική συνάρ··· ημίτονο π

(γ)

In[ ]:=
```
ParametricPlot[{Cos[t], Sin[4 t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```
παραμετρικό διάγρ··· συνημίτ··· ημίτονο π

(δ)

In[ ]:=
```
ParametricPlot[{Cos[t], Sin[(9 * t) / 2]}, {t, 0, 3 Pi}]
```
παραμετρικό διάγρ··· συνημίτ··· ημίτονο π

(ε)

In[ ]:=
```
ParametricPlot[{Cos[t], Cos[3 t]}, {t, 0, 2 Pi}]
```
παραμετρικό διάγρ··· συνημίτ··· συνημίτονο π

(στ)

In[ ]:=
```
ParametricPlot[{Cos[t], Cos[3 t / 2]}, {t, 0, 2 Pi}]
```
παραμετρικό διάγρ··· συνημίτ··· συνημίτονο π

Άσκηση 2

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

Ερώτημα (α)

Άσκηση 1/ σελίδα 25

(α)

In[ ]:=
```
Solve[2 x^3 - x^2 - 2 x + 1 == 0, x]
```
λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]=
$\{\{x \to -1\}, \{x \to \frac{1}{2}\}, \{x \to 1\}\}$

In[ ]:=
```
Plot[2 x^3 - x^2 - 2 x + 1, {x, -2, 2}]
```
διάγραμμα

(β)

In[ ]:=
```
Solve[x^3 - 5 x^2 + 8 x - 6 == 0, x]
```
λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]=
$\{\{x \to 1 - i\}, \{x \to 1 + i\}, \{x \to 3\}\}$

In[ ]:=
```
Plot[x^3 - 5 x^2 + 8 x - 6, {x, 0, 4}]
```
διάγραμμα

(γ)

In[ ]:=
```
Solve[x^4 - x - 1 == 0, x]
```
λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]=
$\{\{x \to -0.724\ldots\}, \{x \to 1.22\ldots\}, \{x \to -0.248\ldots - 1.03\ldots\, i\}, \{x \to -0.248\ldots + 1.03\ldots\, i\}\}$

In[ ]:=
```
Plot[x^4 - x - 1, {x, -1, 2}]
```
διάγραμμα

(δ)

In[ ]:=
```
FullSimplify[Solve[x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1. == 0, x]]
```
πλήρης απλοπο·· λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]=
$\{\{x \to -1.\}, \{x \to -0.5 - 0.866025\, i\}, \{x \to -0.5 + 0.866025\, i\}, \{x \to 0.5 - 0.866025\, i\}, \{x \to 0.5 + 0.866025\, i\}\}$

In[ ]:=
```
Plot[x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, {x, -2, 1}, PlotRange → 5]
```
διάγραμμα εύρος διαγράμματος

Άσκηση 1/ σελίδα 29

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

(α)

In[ ]:=
```
NIntegrate[Exp[Cos[x]], {x, 0, Pi}]
```
προσέγγιση ⋯ εκ⋯ συνημίτονο π

Out[ ]=
```
3.97746
```

(β)

In[ ]:=
```
NIntegrate[Sin[Sin[x]], {x, 0, 1}]
```
προσέγγιση ⋯ ημ⋯ ημίτονο

Out[ ]=
```
0.430606
```

(γ)

In[ ]:=
```
NIntegrate[Exp[-x^4], {x, 0, +Infinity}]
```
προσέγγιση ⋯ εκθετική συνάρτηση άπειρο

Out[ ]=
```
0.906402
```

(δ)

In[ ]:=
```
NIntegrate[Exp[Exp[x]], {x, 0, 1}]
```
προσέγγιση ⋯ εκ⋯ εκθετική συνάρτηση

Out[ ]=
```
6.31656
```

(ε)

In[ ]:=
```
NIntegrate[Sin[x] * Exp[-x^2], {x, 0, Pi}]
```
προσέγγιση ⋯ ημίτονο εκθετική συνάρτηση π

Out[ ]=
```
0.424438
```

(στ)

In[ ]:=
```
NIntegrate[Cos[x] / Cosh[x], {x, -Infinity, +Infinity}]
```
προσέγγιση ⋯ συνημίτ⋯ υπερβολικό συνη⋯ άπειρο άπειρο

Out[ ]=
```
1.25204
```

Άσκηση 2/ σελίδα 29

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

(α)

In[∘]:=
```
NSum[1 / n^(3/2), {n, 1, +Infinity}]
```
αριθμητική προσέγγιση ά⋯ άπειρο

Out[∘]=
```
2.61238
```

(β)

In[∘]:=
```
NSum[n * Exp[-n], {n, 1, +Infinity}]
```
αριθμητ⋯ εκθετική συνάρτηση άπειρο

Out[∘]=
```
0.920674
```

Άσκηση 3/ σελίδα 29

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

(α)

1ος Τρόπος

In[∘]:=
```
Plot[x^5 + 2 x^2 - 5, {x, -3, 3}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → 5]
```
διάγραμμα σημείο τομής αξόνων εύρος διαγράμματος

Σύμφωνα με την εντολή Get Coordinates, παρατηρούμε ότι η ρίζα βρίσκεται κοντά στο παρακάτω σημείο:

```
{{1.156060958585388, 0.053288363849784304`}}
```

In[∘]:=
```
FindRoot[x^5 + 2 x^2 - 5 == 0, {x, 1.15}]
```
εύρεση ριζών

Out[∘]=
```
{x → 1.17493}
```

2ος Τρόπος

In[∘]:=
```
NSolve[x^5 + 2 x^2 - 5 == 0, x]
```
αριθμητική προσέγγιση λύσεων διαφορικής εξίσωσης

Out[∘]=
```
{{x → -1.18011 - 0.605854 i}, {x → -1.18011 + 0.605854 i},
 {x → 0.592647 - 1.43773 i}, {x → 0.592647 + 1.43773 i}, {x → 1.17493}}
```

(β)

1ος Τρόπος

In[ ]:=
```
Plot[x^7 - 3 x^6 + 4 x^3 - 7, {x, -3, 3}, AxesOrigin → {0, 0}, PlotRange → 100]
διάγραμμα                                 σημείο τομής αξόνων   εύρος διαγράμματος
```

Σύμφωνα με την εντολή Get Coordinates, παρατηρούμε ότι η ρίζα βρίσκεται κοντά στο παρακάτω σημείο:

```
{{2.8428920428106084`, 1.7433990079752562`}}
```

In[ ]:=
```
FindRoot[x^7 - 3 x^6 + 4 x^3 - 7, {x, 2.84}]
εύρεση ριζών
```

Out[ ]=
```
{x → 2.83848}
```

<u>2ος Τρόπος</u>

In[ ]:=
```
NSolve[x^7 - 3 x^6 + 4 x^3 - 7 == 0, x]
αριθμητική προσέγγιση λύσεων διαφορικής εξίσωσης
```

Out[ ]=
```
{{x → -0.901741 - 0.651207 i}, {x → -0.901741 + 0.651207 i},
 {x → -0.211109 - 1.08118 i}, {x → -0.211109 + 1.08118 i},
 {x → 1.19361 - 0.466773 i}, {x → 1.19361 + 0.466773 i}, {x → 2.83848}}
```

Ερώτημα (β)

Άσκηση 1/ Σελίδα 31

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων
```

(α)

In[ ]:=
```
Plot[{x, Exp[-x]}, {x, 0, 1}]
διάγραμμα  εκθετική συνάρτηση
```

Σύμφωνα με την εντολή Get Coordinates το σημείο τομής των γραφικών είναι :

```
{{0.5658151870463428, 0.5514744593217227}}
```

In[ ]:=
```
FindRoot[x - Exp[-x] == 0, {x, 0.56}]
εύρεση ριζών   εκθετική συνάρτηση
```

Out[ ]=
```
{x → 0.567143}
```

Άρα το σημείο τομής είναι (0.56 , 0.55)

(β)

In[ ]:=
```
Plot[{x^2, Exp[-x]}, {x, 0, 1}]
διάγραμμα   εκθετική συνάρτηση
```

Σύμφωνα με την εντολή Get Coordinates το σημείο τομής των γραφικών είναι :

```
{{0.7034732389783633, 0.4949248868944309}}
```

In[ ]:=
```
FindRoot[x^2 - Exp[-x] == 0, {x, 0.7}]
```
εύρεση ριζών εκθετική συνάρτηση

Out[ ]=
```
{x → 0.703467}
```

Άρα το σημείο τομής είναι (0.703 , 0.494)

(γ)

In[ ]:=
```
Plot[{2 x, Cos[x]}, {x, -2, 2}]
```
διάγραμμα συνημίτονο

Σύμφωνα με την εντολή Get Coordinates το σημείο τομής των γραφικών είναι :

```
{{0.4507910656119125, 0.9174130763700035}}
```

In[ ]:=
```
FindRoot[2 x - Cos[x] == 0, {x, 0.45}]
```
εύρεση ριζών συνημίτονο

Out[ ]=
```
{x → 0.450184}
```

Άρα το σημείο τομής είναι (0.45 , 0.91)

(δ)

In[ ]:=
```
Plot[{x, 3 * Cos[x]}, {x, -4, 4}]
```
διάγραμμα συνημίτονο

Σύμφωνα με την εντολή Get Coordinates τα σημεία τομής των γραφικών είναι :

```
{{1.1706026058631922`, 1.1398142761582015`}}
```

και

```
{{-2.770183806421591, -2.7753911208078277`}}
```

In[ ]:=
```
FindRoot[x - 3 * Cos[x] == 0, {x, 1.17}]
```
εύρεση ριζών συνημίτονο

Out[ ]=
```
{x → 1.17012}
```

In[ ]:=
```
FindRoot[x - 3 * Cos[x] == 0, {x, -2.77}]
```
εύρεση ριζών συνημίτονο

Out[ ]=
```
{x → -2.66318}
```

Άρα τα σημεία τομής είναι (1.17 , 1.17) και (-2.66,-2.66)

(ε)

In[ ]:=
```
Plot[{x^2, Sin[x]}, {x, 0, 2}]
```
διάγραμμα ημίτονο

Σύμφωνα με την εντολή Get Coordinates τα σημεία τομής των γραφικών είναι :

```
{{0.8870890900428772, 0.7404727421931847}}
```

In[∘]:=
```
FindRoot[x^2 - Sin[x] == 0, {x, 0.88}]
```
εύρεση ριζών ημίτονο

Out[∘]=
```
{x → 0.876726}
```

Άρα το σημείο τομής είναι (0.87 , 0.75)

(στ)

In[∘]:=
```
Plot[{2 x, Tan[x]}, {x, 0, 11}]
```
διάγραμμα εφαπτομένη

Έχει άπειρες λύσεις μερικές εξ'αυτών είναι :
(0,0),(1.21, 1.96),(4.607, 8.948),(7.79, 15.33),(10.96, 21.62),..
Παρατηρούμε ότι τα x διαφέρουν περίπου κατά 3.

Άσκηση 2/ Σελίδα 32

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

(α)

In[∘]:=
```
Plot[x * Exp[-x^2], {x, -3, 3}]
```
διάγρα··· εκθετική συνάρτηση

In[∘]:=
```
FindMaximum[x * Exp[-x^2], {x, 0}]
```
εύρεση τοπικού μέ··· εκθετική συνάρτηση

Out[∘]=
```
{0.428882, {x → 0.707107}}
```

Μέγιστη Τιμή 0.42 στο x=0.707

(β)

In[∘]:=
```
Plot[x^3 / (Exp[x] - 1), {x, 0, 10}]
```
διάγραμμα εκθετική συνάρτηση

In[∘]:=
```
FindMaximum[x^3 / (Exp[x] - 1), {x, 2}]
```
εύρεση τοπικού μέγι··· εκθετική συνάρτηση

Out[∘]=
```
{1.42144, {x → 2.82144}}
```

Μέγιστη Τιμή 1.42 στο x=2.82

(γ)

In[∘]:=
```
Plot[(x^4 + 1) * Exp[-x^2], {x, -1, 1}]
```
διάγραμμα εκθετική συνάρτηση

In[ ]:=
```
FindMaximum[(x^4 + 1) * Exp[-x^2], {x, 0.1}]
```
εύρεση τοπικού μέγιστου   εκθετική συνάρτηση

Out[ ]= $\{1., \{x \to 2.38572 \times 10^{-9}\}\}$

Μέγιστη Τιμή 1 στο x=0

(δ)

In[ ]:=
```
Plot[(x^2 - 1) / ((x^2 + 1)^2), {x, -2, 2}]
```
διάγραμμα

In[ ]:=
```
FindMaximum[(x^2 - 1) / ((x^2 + 1)^2), {x, 1}]
```
εύρεση τοπικού μέγιστου

Out[ ]= {0.125, {x → 1.73205}}

Μέγιστη Τιμή 0.125 στο x=1.73

In[ ]:=
```
FindMaximum[(x^2 - 1) / ((x^2 + 1)^2), {x, -1}]
```
εύρεση τοπικού μέγιστου

Out[ ]= {0.125, {x → -1.73205}}

Μέγιστη Τιμή 0.125 στο x=-1.73

Άρα γενικά το μέγιστο είναι το 0.125.

Άσκηση 3

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

Ερώτημα (α)

Άσκηση 5/ σελίδα 47

(α)

In[ ]:=
```
Factor[x^8 - 1]
```
παραγοντοποίηση πολυωνύμου

Out[ ]= $(-1 + x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)$

Επαλήθευση

In[ ]:=
```
Expand[(-1 + x) (1 + x) (1 + x^2) (1 + x^4)]
```
επέκταση πολυωνύμου

Out[ ]= $-1 + x^8$

(β)

In[∘]:=
```
Factor[x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1]
```
παραγοντοποίηση πολυωνύμου

Out[∘]= $(1+x)(1-x+x^2)(1+x+x^2)$

Επαλήθευση

In[∘]:=
```
Expand[(1 + x) (1 - x + x^2) (1 + x + x^2)]
```
επέκταση πολυωνύμου

Out[∘]= $1+x+x^2+x^3+x^4+x^5$

(γ)

In[∘]:=
```
Factor[x^3 - 3 x^2 - x + 3]
```
παραγοντοποίηση πολυωνύμου

Out[∘]= $(-3+x)(-1+x)(1+x)$

Επαλήθευση

In[∘]:=
```
Expand[(-3 + x) (-1 + x) (1 + x)]
```
επέκταση πολυωνύμου

Out[∘]= $3-x-3x^2+x^3$

(δ)

In[∘]:=
```
FactorSquareFree[x^4 - x - 1]
```
παραγοντοποίηση square–free παραγόντων

Out[∘]= $-1-x+x^4$

Δεν παραγοντοποιείται, διότι η εντολή Factor παραγοντοποιεί σε ακέραια πολυώνυμα.

Μπορούμε να ορίσουμε την παρακάτω εντολή και να το παραγοντοποιήσουμε.

In[∘]:=
```
fullFactor[f_, x_] := Roots[f == 0, x] /. Equal → ((#1 - #2) &) /. Or → Times
```
εξισώσεις ριζών | ίσο με | OR | πολλαπ

In[∘]:=
```
fullFactor[x^4 - x - 1., x]
```

Out[∘]= $(-1.22074+x)((0.248126-1.03398\,i)+x)((0.248126+1.03398\,i)+x)(0.724492+x)$

Άσκηση 6/ σελίδα 47

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

(α)

In[ ]:=
```
Apart[x^3 / (x^3 - 1)]
```
αποσυναρμολόγηση

Out[ ]=
$$1+\frac{1}{3\,(-1+x)}+\frac{-2-x}{3\,(1+x+x^2)}$$

In[ ]:=
$$\text{FullSimplify}\left[\text{Together}\left[1+\frac{1}{3\,(-1+x)}+\frac{-2-x}{3\,(1+x+x^2)}\right]\right]$$
πλήρης απλοπο·· μαζί

Out[ ]=
$$\frac{x^3}{-1+x^3}$$

(β)

In[ ]:=
```
Apart[1 / (x^8 - 1)]
```
αποσυναρμολόγηση

Out[ ]=
$$\frac{1}{8\,(-1+x)}-\frac{1}{8\,(1+x)}-\frac{1}{4\,(1+x^2)}-\frac{1}{2\,(1+x^4)}$$

In[ ]:=
$$\text{FullSimplify}\left[\text{Together}\left[\frac{1}{8\,(-1+x)}-\frac{1}{8\,(1+x)}-\frac{1}{4\,(1+x^2)}-\frac{1}{2\,(1+x^4)}\right]\right]$$
πλήρης απλοπο·· μαζί

Out[ ]=
$$\frac{1}{-1+x^8}$$

(γ)

In[ ]:=
```
Apart[(x^6 + 1) / (x^6 - 1)]
```
αποσυναρμολόγηση

Out[ ]=
$$1+\frac{1}{3\,(-1+x)}-\frac{1}{3\,(1+x)}+\frac{-2+x}{3\,(1-x+x^2)}+\frac{-2-x}{3\,(1+x+x^2)}$$

In[ ]:=
$$\text{FullSimplify}\left[\text{Together}\left[1+\frac{1}{3\,(-1+x)}-\frac{1}{3\,(1+x)}+\frac{-2+x}{3\,(1-x+x^2)}+\frac{-2-x}{3\,(1+x+x^2)}\right]\right]$$
πλήρης απλοπο·· μαζί

Out[ ]=
$$\frac{1+x^6}{-1+x^6}$$

(δ)

In[ ]:=
```
Apart[x^2 / (x^4 - 1)]
```
αποσυναρμολόγηση

Out[ ]=
$$\frac{1}{4\,(-1+x)}-\frac{1}{4\,(1+x)}+\frac{1}{2\,(1+x^2)}$$

In[∘]:=
```
FullSimplify[Together[1/(4 (-1 + x)) - 1/(4 (1 + x)) + 1/(2 (1 + x^2))]]
πλήρης απλοπο·· μαζί
```
$$\frac{1}{4(-1+x)} - \frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{2(1+x^2)}$$

Out[∘]=
$$\frac{x^2}{-1+x^4}$$

Άσκηση 7/ σελίδα 47

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων
```

(α)

In[∘]:=
```
Limit[x * Log[x], x → 0]
όριο        λογάριθμος
```

Out[∘]= 0

(β)

In[∘]:=
```
Limit[x * Log[x], x → +Infinity]
όριο        λογάριθμος      άπειρο
```

Out[∘]= ∞

(γ)

In[∘]:=
```
Limit[(1 - Cos[x]) / x^2, x → 0]
όριο          συνημίτονο
```

Out[∘]=
$$\frac{1}{2}$$

(δ)

In[∘]:=
```
Limit[Sin[x] / (Exp[x] - 1), x → 0]
όριο   ημίτονο    εκθετική συνάρτηση
```

Out[∘]= 1

(ε)

In[∘]:=
```
Limit[Sin[x] / Sin[2 x], x → Pi]
όριο   ημίτονο   ημίτονο          π
```

Out[∘]=
$$-\frac{1}{2}$$

(στ)

In[ ]:=
```
Limit[Exp[-x] * Cosh[x], x → +Infinity]
```
όριο | εκθετική σ⋯ | υπερβολικό συνη⋯ | άπειρο

Out[ ]= $\frac{1}{2}$

Ερώτημα (β)

Άσκηση 2/ σελίδα 80

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:=
```
g[a_] := FindRoot[Exp[-x] == a * x, {x, 1}]; Table[g[0.1 n], {n, 1, 50}]
```
εύρεση ρ⋯ | εκθετική συνάρτηση | πίνακας τιμών

Out[ ]=
```
{{x → 1.74553}, {x → 1.32672}, {x → 1.10454}, {x → 0.958586}, {x → 0.852606},
 {x → 0.770953}, {x → 0.70551}, {x → 0.651548}, {x → 0.606089}, {x → 0.567143},
 {x → 0.533321}, {x → 0.503617}, {x → 0.477282}, {x → 0.453746}, {x → 0.432563},
 {x → 0.413381}, {x → 0.395919}, {x → 0.379944}, {x → 0.365269}, {x → 0.351734},
 {x → 0.339207}, {x → 0.327576}, {x → 0.316746}, {x → 0.306633}, {x → 0.297168},
 {x → 0.288287}, {x → 0.279937}, {x → 0.272071}, {x → 0.264647}, {x → 0.257628},
 {x → 0.25098}, {x → 0.244675}, {x → 0.238686}, {x → 0.232989}, {x → 0.227563},
 {x → 0.22239}, {x → 0.217451}, {x → 0.21273}, {x → 0.208214}, {x → 0.203888},
 {x → 0.199742}, {x → 0.195763}, {x → 0.191943}, {x → 0.188271}, {x → 0.184738},
 {x → 0.181338}, {x → 0.178062}, {x → 0.174904}, {x → 0.171857}, {x → 0.168916}}
```

Εξάρτηση της ρίζας x από το α

In[ ]:=
```
Plot[x /. g[α], {α, 1, 5}]
```
διάγραμμα

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:=
```
f[a_] := FindRoot[x * Cosh[x] == a, {x, 1}]; Table[f[0.1 n], {n, 1, 50}]
```
εύρεση ριζών | υπερβολικό συνημίτονο | πίνακας τιμών

Out[ ]=
```
{{x → 0.099507}, {x → 0.196211}, {x → 0.287976}, {x → 0.373618}, {x → 0.452787},
 {x → 0.525679}, {x → 0.592771}, {x → 0.654642}, {x → 0.711875}, {x → 0.76501},
 {x → 0.814527}, {x → 0.860844}, {x → 0.904324}, {x → 0.945276}, {x → 0.983969},
 {x → 1.02063}, {x → 1.05546}, {x → 1.08864}, {x → 1.1203}, {x → 1.15058},
 {x → 1.17961}, {x → 1.20747}, {x → 1.23427}, {x → 1.26007}, {x → 1.28496},
 {x → 1.30899}, {x → 1.33223}, {x → 1.35472}, {x → 1.37652}, {x → 1.39766},
 {x → 1.41819}, {x → 1.43814}, {x → 1.45754}, {x → 1.47642}, {x → 1.49482},
 {x → 1.51276}, {x → 1.53025}, {x → 1.54733}, {x → 1.564}, {x → 1.5803},
 {x → 1.59624}, {x → 1.61183}, {x → 1.62709}, {x → 1.64203}, {x → 1.65667},
 {x → 1.67102}, {x → 1.68509}, {x → 1.69889}, {x → 1.71243}, {x → 1.72573}}
```

Εξάρτηση της ρίζας x από το α

In[∘]:=
```
Plot[x /. f[α], {α, 1, 5}]
```
διάγραμμα

Βρίσκουμε όλες τις ρίζες των εξισώσεων για κάθε α που ανήκει από 0 έως 5 με βήμα 0.1.

Ερώτημα (γ)

Άσκηση 2/ σελίδα 92

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

(α)

```
Plot3D[ⅇ^-(x^2+y^2), {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, PlotRange → 2, PlotPoints → 10, Boxed → False]
```
3D διάγραμμα εύρος διαγράμμα··· αριθμός σημείων δι··· περίγρ··· ψευδής

(β)

```
Plot3D[Cos[x^2 - y^2], {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, PlotRange → 1, PlotPoints → 10]
```
3D διά··· συνημίτονο εύρος διαγράμμα··· αριθμός σημείων διαγρ

Άσκηση 3/ σελίδα 92

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

(α)

In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{r * Cos[θ], r * Sin[θ], r^2}, {r, 0, 1}, {θ, 0, 2 Pi}]
```
3D παραμετρικό διάγραμμα συνημίτονο ημίτονο π

(β)

In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{r * Cos[θ], r * Sin[θ], r (1 - r^2)}, {r, 0, 1}, {θ, 0, 2 Pi}]
```
3D παραμετρικό διάγραμμα συνημίτονο ημίτονο π

(γ)

In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{r * Cos[θ], r * Sin[θ], r (1 - r^2)}, {r, 0, 1.5}, {θ, 0, 2 Pi}]
```
3D παραμετρικό διάγραμμα συνημίτονο ημίτονο π

(ε)

In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{r * Cos[θ], r * Sin[θ], Cos[r]}, {r, 0, 2 Pi}, {θ, 0, Pi}]
```
3D παραμετρικό διάγραμμα συνημίτονο ημίτονο συνημίτονο π π

Άσκηση 4

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

(α)

Συμβολικά

In[ ]:=
```
Solve[x - y + 2 z == 1 && 3 x + y + z == 2 && -x + y - z == 3, {x, y, z}]
```
λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]= $\left\{\left\{x \to -\frac{9}{4},\ y \to \frac{19}{4},\ z \to 4\right\}\right\}$

Αριθμητικά

In[ ]:=
```
NSolve[x - y + 2 z == 1 && 3 x + y + z == 2 && -x + y - z == 3, {x, y, z}]
```
αριθμητική προσέγγιση λύσεων διαφορικής εξίσωσης

Out[ ]=
```
{{x -> -2.25, y -> 4.75, z -> 4.}}
```

Το σύστημά μας είναι ισοδύναμο με :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Για να επαληθεύσουμε το σύστημα, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9/4 \\ 19/4 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2.25 \\ 4.75 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In[ ]:=
```
A := {{1, -1, 2}, {3, 1, 1}, {-1, 1, -1}}
```

In[ ]:=
```
X1 := {{-9/4}, {19/4}, {4}}
```

In[ ]:=
```
X2 := {{-2.25}, {4.75}, {4}}
```

In[ ]:=
```
B := {{1}, {2}, {3}}
```

In[ ]:=
```
A.X1
```

Out[ ]=
```
{{1}, {2}, {3}}
```

In[ ]:=
```
A.X2
```

Out[ ]=
```
{{1.}, {2.}, {3.}}
```

Οπότε επαληθεύτηκε και τις δύο φορές.

Ορίζουσα του A

In[∘]:=
```
Det[A]
```
ορίζουσα

Out[∘]=
```
4
```

Αντίστροφος του A

In[∘]:=
```
Inverse[A]
```
αντιστροφή μήτρας

Out[∘]=
$$\left\{\left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}\right\}, \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right\}, \{1, 0, 1\}\right\}$$

(β)

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[∘]:=
```
f[x_, y_] := x^3 + y^3 - 3 (x - 4 y) + 20
```

In[∘]:=
```
D[f[x, y], x]
```
μερική παράγωγος

Out[∘]=
$-3 + 3 x^2$

In[∘]:=
```
D[f[x, y], y]
```
μερική παράγωγος

Out[∘]=
$12 + 3 y^2$

Θα λύσουμε το σύστημα που προκύπτει αν εξισώσουμε την κλίση της f με το μηδενικό διάνυσμα.

In[∘]:=
```
Solve[-3 + 3 x^2 == 0 && 12 + 3 y^2 == 0, {x, y}]
```
λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[∘]=
```
{{x → -1, y → -2 i}, {x → 1, y → -2 i}, {x → -1, y → 2 i}, {x → 1, y → 2 i}}
```

Δεν έχει ακρότατα.

Άσκηση 5

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

Άσκηση 3/ σελίδα 155

Το δυναμικό σύστημα είναι το :

x1’=x2

x2’=-x1-μf(x1)x2

Διαλέγουμε την f(x1)=x1 και έχουμε :

x1’=x2

x2’=-x1-μx1x2

Με F(x1,x2)=(x2,x1-μx1x2).

Τα σημεία ισορροπίας τα βρίσκουμε λύνοντας το σύστημα :

x2=0

-x1-μx1x2=0

Με την εντολή Solve.

In[∘]:=
```
Solve[x2 == 0 && -x1 - μ * f * x2 == 0, {x1, x2}]
λύση εξισώσεων και ανισώσεων
```
Out[∘]=
```
{{x1 → 0, x2 → 0}}
```

Άρα το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το (0,0).

Θα υπολογίσουμε τον Ιακωβιανό Πίνακα της F(x,y).

In[∘]:=
```
f1[x1_, x2_] := x2
```
In[∘]:=
```
f2[x1_, x2_] := -x1 - μ * f * x2
```
In[∘]:=
```
D[f1[x1, x2], x1]
μερική παράγωγος
```
Out[∘]=
```
0
```
In[∘]:=
```
D[f1[x1, x2], x2]
μερική παράγωγος
```
Out[∘]=
```
1
```
In[∘]:=
```
D[f2[x1, x2], x1]
μερική παράγωγος
```
Out[∘]=
```
-1
```
In[∘]:=
```
D[f1[x1, x2], x2]
μερική παράγωγος
```
Out[∘]=
```
1
```
In[∘]:=
```
J[x1_, x2_] =
  {{D[f1[x1, x2], x1], D[f1[x1, x2], x2]}, {D[f2[x1, x2], x1], D[f2[x1, x2], x2]}}
    μερική παράγωγος   μερική παράγωγος      μερική παράγωγος   μερική παράγωγος
```
Out[∘]=
```
{{0, 1}, {-1, -f μ}}
```
In[∘]:=
```
J[0, 0]
```
Out[∘]=
```
{{0, 1}, {-1, -f μ}}
```

In[∘]:=
```
Eigenvalues[J[0, 0]]
```
ιδιοτιμές

Out[∘]=
$$\left\{\frac{1}{2}\left(-f\,\mu-\sqrt{-4+f^2\,\mu^2}\right),\ \frac{1}{2}\left(-f\,\mu+\sqrt{-4+f^2\,\mu^2}\right)\right\}$$

Αν f(0)>0, τότε οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές άρα το (0,0) είναι ευσταθές.
Αν f(0)<0, τότε οι ιδιοτιμές είναι θετικές άρα το (0,0) είναι ασταθές.
Αν f(0)=0, τότε οι ιδιοτιμές είναι i,-i τότε το (0,0) είναι κέντρο.

1η Περίπτωση f(0)=0

Διαλέγουμε f(x)=x

In[∘]:=
```
Solve[x2 == 0 && -x1 - μ * x1 * x2 == 0, {x1, x2}]
```
λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[∘]=
```
{{x1 → 0, x2 → 0}}
```

Άρα το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το (0,0).
Θα υπολογίσουμε τον Ιακωβιανό Πίνακα της F(x,y).

In[∘]:=
```
f1[x1_, x2_] := x2
```

In[∘]:=
```
f2[x1_, x2_] := -x1 - μ * x1 * x2
```

In[∘]:=
```
D[f1[x1, x2], x1]
```
μερική παράγωγος

Out[∘]=
```
0
```

In[∘]:=
```
D[f1[x1, x2], x2]
```
μερική παράγωγος

Out[∘]=
```
1
```

In[∘]:=
```
D[f2[x1, x2], x1]
```
μερική παράγωγος

Out[∘]=
```
-1 - x2 μ
```

In[∘]:=
```
D[f1[x1, x2], x2]
```
μερική παράγωγος

Out[∘]=
```
1
```

In[∘]:=
```
J[x1_, x2_] =
  {{D[f1[x1, x2], x1], D[f1[x1, x2], x2]}, {D[f2[x1, x2], x1], D[f2[x1, x2], x2]}}
```
μερική παράγωγος μερική παράγωγος μερική παράγωγος μερική παράγωγος

Out[∘]=
```
{{0, 1}, {-1 - x2 μ, -x1 μ}}
```

In[ ]:=
```
J[0, 0]
```
Out[ ]=
```
{{0, 1}, {-1, 0}}
```

In[ ]:=
```
Eigenvalues[J[0, 0]]
```
ιδιοτιμές

Out[ ]=
```
{i, -i}
```

Αν f(0)=0, τότε οι ιδιοτιμές είναι i,-i τότε το (0,0) είναι κέντρο.

<u>2η Περίπτωση f(0)>0</u>

$f(x) = x^2 + 1$

In[ ]:=
```
Solve[x2 == 0 && -x1 - μ * (x1^2 + 1) * x2 == 0, {x1, x2}]
```
λύση εξισώσεων και ανισώσεων

Out[ ]=
```
{{x1 → 0, x2 → 0}}
```

Άρα το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το (0,0).

Θα υπολογίσουμε τον Ιακωβιανό Πίνακα της F(x,y).

In[ ]:=
```
f1[x1_, x2_] := x2
```

In[ ]:=
```
f2[x1_, x2_] := -x1 - μ * (x1^2 + 1) * x2
```

In[ ]:=
```
D[f1[x1, x2], x1]
```
μερική παράγωγος

Out[ ]=
```
0
```

In[ ]:=
```
D[f1[x1, x2], x2]
```
μερική παράγωγος

Out[ ]=
```
1
```

In[ ]:=
```
D[f2[x1, x2], x1]
```
μερική παράγωγος

Out[ ]=
```
-1 - 2 x1 x2 μ
```

In[ ]:=
```
D[f1[x1, x2], x2]
```
μερική παράγωγος

Out[ ]=
```
1
```

In[ ]:=
```
J[x1_, x2_] =
  {{D[f1[x1, x2], x1], D[f1[x1, x2], x2]}, {D[f2[x1, x2], x1], D[f2[x1, x2], x2]}}
```
μερική παράγωγος μερική παράγωγος μερική παράγωγος μερική παράγωγος

Out[ ]=
```
{{0, 1}, {-1 - 2 x1 x2 μ, -(1 + x1^2) μ}}
```

In[ ]:=
```
J[0, 0]
```
Out[ ]=
```
{{0, 1}, {-1, -μ}}
```

In[ ]:=
```
Eigenvalues[J[0, 0]]
ιδιοτιμές
```
Out[ ]=
$$\left\{\frac{1}{2}\left(-\mu-\sqrt{-4+\mu^2}\right), \frac{1}{2}\left(-\mu+\sqrt{-4+\mu^2}\right)\right\}$$

Άρα αν f(0)>0, τότε οι ιδιοτιμές είναι αρνητικές, άρα το (0,0) είναι ευσταθές.

3η Περίπτωση f(0)<0

$f(x) = x^2 - 1$

In[ ]:=
```
Solve[x2 == 0 && -x1 - μ * (x1^2 - 1) * x2 == 0, {x1, x2}]
λύση εξισώσεων και ανισώσεων
```
Out[ ]=
```
{{x1 → 0, x2 → 0}}
```

Άρα το μοναδικό σημείο ισορροπίας είναι το (0,0).

Θα υπολογίσουμε τον Ιακωβιανό Πίνακα της F(x,y).

In[ ]:=
```
f1[x1_, x2_] := x2
```

In[ ]:=
```
f2[x1_, x2_] := -x1 - μ * (x1^2 - 1) * x2
```

In[ ]:=
```
D[f1[x1, x2], x1]
μερική παράγωγος
```
Out[ ]=
```
0
```

In[ ]:=
```
D[f1[x1, x2], x2]
μερική παράγωγος
```
Out[ ]=
```
1
```

In[ ]:=
```
D[f2[x1, x2], x1]
μερική παράγωγος
```
Out[ ]=
```
-1 - 2 x1 x2 μ
```

In[ ]:=
```
D[f1[x1, x2], x2]
μερική παράγωγος
```
Out[ ]=
```
1
```

In[ ]:=
```
J[x1_, x2_] =
  {{D[f1[x1, x2], x1], D[f1[x1, x2], x2]}, {D[f2[x1, x2], x1], D[f2[x1, x2], x2]}}
    μερική παράγωγος    μερική παράγωγος    μερική παράγωγος    μερική παράγωγος
```

Out[ ]= $\{\{0, 1\}, \{-1 - 2\,x1\,x2\,\mu, -(-1 + x1^2)\,\mu\}\}$

In[ ]:=
```
J[0, 0]
```

Out[ ]= $\{\{0, 1\}, \{-1, \mu\}\}$

In[ ]:=
```
Eigenvalues[J[0, 0]]
ιδιοτιμές
```

Out[ ]= $\left\{\frac{1}{2}\left(\mu - \sqrt{-4 + \mu^2}\right), \frac{1}{2}\left(\mu + \sqrt{-4 + \mu^2}\right)\right\}$

Άρα αν f(0)<0, τότε οι ιδιοτιμές είναι θετικές άρα το (0,0) ασταθές.

Άσκηση 6

(α) ερώτημα

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων
```

In[ ]:=
```
Solve[z + (y - a) * x == 0 && 1 - β * y - x^2 == 0 && -x - γ * z == 0, {x, y, z}]
λύση εξισώσεων και ανισώσεων
```

Out[ ]= $\left\{\left\{x \to 0, y \to \frac{1}{\beta}, z \to 0\right\}, \left\{x \to -\frac{\sqrt{-\beta + \gamma - a\,\beta\,\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, y \to \frac{1 + a\,\gamma}{\gamma}, z \to \frac{\sqrt{-\beta + \gamma - a\,\beta\,\gamma}}{\gamma^{3/2}}\right\}, \left\{x \to \frac{\sqrt{-\beta + \gamma - a\,\beta\,\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, y \to \frac{1 + a\,\gamma}{\gamma}, z \to -\frac{\sqrt{-\beta + \gamma - a\,\beta\,\gamma}}{\gamma^{3/2}}\right\}\right\}$

Άρα τα σταθερά σημεία είναι του παραπάνω συστήματος

(β) ερώτημα

In[ ]:=
```
f1[x_, y_, z_] = z + (y - a) * x
```

Out[ ]= $x\,(-a + y) + z$

In[ ]:=
```
f2[x_, y_, z_] = 1 - β * y - x^2
```

Out[ ]= $1 - x^2 - y\,\beta$

In[∘]:=
```
f3[x_, y_, z_] = -x - γ * z
```
Out[∘]= $-x - z\gamma$

In[∘]:=
```
J[x_, y_, z_] = D[{f1[x, y, z], f2[x, y, z], f3[x, y, z]}, {{x, y, z}}]
```
μερική παράγωγος

Out[∘]= $\{\{-a + y, x, 1\}, \{-2x, -\beta, 0\}, \{-1, 0, -\gamma\}\}$

Για το (0,0,0)

In[∘]:= $J[0, 1/\beta, 0]$

Out[∘]= $\left\{\left\{-a + \frac{1}{\beta}, 0, 1\right\}, \{0, -\beta, 0\}, \{-1, 0, -\gamma\}\right\}$

Για το $\left(-\frac{\sqrt{-\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, \frac{1+\alpha\gamma}{\gamma}, \frac{\sqrt{-\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}}{\gamma^{3/2}}\right)$

In[∘]:= $J\left[-\frac{\sqrt{-\beta+\gamma-a*\beta*\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, \frac{1+a*\gamma}{\gamma}, \frac{\sqrt{-\beta+\gamma-a*\beta*\gamma}}{\gamma^{3/2}}\right]$

Out[∘]= $\left\{\left\{-a + \frac{1+a\gamma}{\gamma}, -\frac{\sqrt{-\beta+\gamma-a\beta\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, 1\right\}, \left\{\frac{2\sqrt{-\beta+\gamma-a\beta\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, -\beta, 0\right\}, \{-1, 0, -\gamma\}\right\}$

Για το $\left(\frac{\sqrt{-\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, \frac{1+\alpha\gamma}{\gamma}, -\frac{\sqrt{-\beta+\gamma-\alpha\beta\gamma}}{\gamma^{3/2}}\right)$

In[∘]:= $J\left[\frac{\sqrt{-\beta+\gamma-a*\beta*\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, \frac{1+a*\gamma}{\gamma}, -\frac{\sqrt{-\beta+\gamma-a*\beta*\gamma}}{\gamma^{3/2}}\right]$

Out[∘]= $\left\{\left\{-a + \frac{1+a\gamma}{\gamma}, \frac{\sqrt{-\beta+\gamma-a\beta\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, 1\right\}, \left\{-\frac{2\sqrt{-\beta+\gamma-a\beta\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, -\beta, 0\right\}, \{-1, 0, -\gamma\}\right\}$

(γ) ερώτημα

In[∘]:= $\text{CharacteristicPolynomial}[J[0, 1/\beta, 0], \lambda]$
χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Out[∘]= $(-\beta - \lambda)\left(1 + a\gamma - \frac{\gamma}{\beta} + a\lambda - \frac{\lambda}{\beta} + \gamma\lambda + \lambda^2\right)$

In[∘]:= $\text{CharacteristicPolynomial}\left[J\left[-\frac{\sqrt{-\beta+\gamma-a*\beta*\gamma}}{\sqrt{\gamma}}, \frac{1+a*\gamma}{\gamma}, \frac{\sqrt{-\beta+\gamma-a*\beta*\gamma}}{\gamma^{3/2}}\right], \lambda\right]$
χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Out[∘]= $2\beta - 2\gamma + 2a\beta\gamma - 2\lambda + 2a\beta\lambda + \frac{3\beta\lambda}{\gamma} - \beta\gamma\lambda - \beta\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{\gamma} - \gamma\lambda^2 - \lambda^3$

In[∘]:=
```
CharacteristicPolynomial[J[Sqrt[-β + γ - a*β*γ]/Sqrt[γ], (1 + a*γ)/γ, -Sqrt[-β + γ - a*β*γ]/γ^(3/2)], λ]
```
χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Out[∘]=

$$2\beta - 2\gamma + 2a\beta\gamma - 2\lambda + 2a\beta\lambda + \frac{3\beta\lambda}{\gamma} - \beta\gamma\lambda - \beta\lambda^2 + \frac{\lambda^2}{\gamma} - \gamma\lambda^2 - \lambda^3$$

(δ) ερώτημα

In[∘]:=
```
a = 0.9;
```

In[∘]:=
```
β = 0.2;
```

In[∘]:=
```
γ = 1.2;
```

In[∘]:=
```
Solve[CharacteristicPolynomial[J[0, 1/β, 0], λ] == 0, λ]
```
λύση ⋯ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Out[∘]=
```
{{λ → -1.00408}, {λ → -0.2}, {λ → 3.90408}}
```

In[∘]:=
```
Solve[CharacteristicPolynomial[
  J[-Sqrt[-β + γ - a*β*γ]/Sqrt[γ], (1 + a*γ)/γ, Sqrt[-β + γ - a*β*γ]/γ^(3/2)], λ] == 0, λ]
```
λύση ⋯ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Out[∘]=
```
{{λ → -0.91977}, {λ → 0.176552 - 1.29368 i}, {λ → 0.176552 + 1.29368 i}}
```

In[∘]:=
```
Solve[CharacteristicPolynomial[
  J[Sqrt[-β + γ - a*β*γ]/Sqrt[γ], (1 + a*γ)/γ, -Sqrt[-β + γ - a*β*γ]/γ^(3/2)], λ] == 0, λ]
```
λύση ⋯ χαρακτηριστικό πολυώνυμο

Out[∘]=
```
{{λ → -0.91977}, {λ → 0.176552 - 1.29368 i}, {λ → 0.176552 + 1.29368 i}}
```

Επαληθεύουμε με τις έτοιμες εντολές του Mathematica

In[∘]:=
```
Eigenvalues[J[0, 1/β, 0]]
```
ιδιοτιμές

Out[∘]=
```
{3.90408, -1.00408, -0.2}
```

In[∘]:=
```
Eigenvalues[J[-Sqrt[-β + γ - a*β*γ]/Sqrt[γ], (1 + a*γ)/γ, Sqrt[-β + γ - a*β*γ]/γ^(3/2)]]
```
ιδιοτιμές

Out[∘]=
```
{0.176552 + 1.29368 i, 0.176552 - 1.29368 i, -0.91977 + 0. i}
```

In[∘]:=
```
Eigenvalues[J[√(-β + γ - a * β * γ)/√γ, (1 + a * γ)/γ, -√(-β + γ - a * β * γ)/γ^(3/2)]]
```
ιδιοτιμές

Out[∘]=
```
{0.176552 + 1.29368 i, 0.176552 - 1.29368 i, -0.91977 + 0. i}
```

(ε) ερώτημα

Παρατηρούμε ότι μία από τις τρεις ιδιοτιμές του κάθε Ιακωβιανού πίνακα είναι πραγματική και απολύτως
μεγαλύτερη από το πραγματικό μέρος της αντίστοιχης μιγαδικής ιδιοτιμης.
Άρα το σύστημα αυτό έχει χαοτική συμπεριφορά με βάση το θεώρημα Shilnikov.

Άσκηση 7

(α) ερώτημα

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[∘]:=
```
ODE[a_, b_, c_] :=
 NDSolve[{x'[t] == z[t] + (y[t] - a) * x[t], y'[t] == 1 - b * y[t] - (x[t])^2,
   z'[t] == -x[t] - c * z[t], x[0] == 1, y[0] == 3, z[0] == 2}, {x, y, z}, {t, 0, 1000}]
```
αριθμητική λύση διαφορικής εξίσωσης

In[∘]:=
```
p1 = ODE[0.9, 0.2, 1.2]
```

Out[∘]=
```
{{x → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ],
  y → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ],
  z → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ]}}
```

In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]} /. p1, {t, 0, 1000}, PlotRange → 3]
```
3D παραμετρικό διάγραμμα — εύρος διαγράμματος

(β) ερώτημα

In[∘]:=
```
ODE1[a_, b_, c_] := NDSolve[{x'[t] == z[t] + (y[t] - a) * x[t],
    y'[t] == 1 - b * y[t] - (x[t])^2, z'[t] == -x[t] - c * z[t],
    x[0] == 1.001, y[0] == 3.001, z[0] == 2.001}, {x, y, z}, {t, 0, 1000}]
```
αριθμητική λύση διαφορικής εξίσωσης

In[∘]:=
```
p2 = ODE1[0.9, 0.2, 1.2]
```

Out[∘]=
```
{{x → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00 × 10^3}} Output: scalar ],
  y → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00 × 10^3}} Output: scalar ],
  z → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00 × 10^3}} Output: scalar ]}}
```

In[∘]:=
```
PLOT1 = Plot[{{x[t] /. p1}, {x[t] /. p2}}, {t, 0, 200}]
```
διάγραμμα

In[∘]:=
```
PLOT2 = Plot[{{y[t] /. p1}, {y[t] /. p2}}, {t, 0, 200}]
```
διάγραμμα

In[∘]:=
```
PLOT3 = Plot[{{z[t] /. p1}, {z[t] /. p2}}, {t, 0, 200}]
```
διάγραμμα

Μετά την τιμή t=50 έχουμε απόκλιση της ταξης 10^{-3} των συναρτήσεων μεταξύ τους.

Άρα T=50.

Λόγω του χάους,δηλαδή της ευαισθησίας των αρχικών συνθηκών που έχει το δυναμικό σύστημα,μετά την τιμή t=50 έχουμε πολύ μεγάλες αποκλίσεις.

(γ) ερώτημα

(i)

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[∘]:=
```
ODE2[a_, b_, c_] :=
 NDSolve[{x'[t] == z[t] + (y[t] - a) * x[t], y'[t] == 1 - b * y[t] - (x[t])^2,
   z'[t] == -x[t] - c * z[t], x[0] == 1, y[0] == 3, z[0] == 2}, {x, y, z}, {t, 0, 1000}]
```
αριθμητική λύση διαφορικής εξίσωσης

In[∘]:=
```
p3 = ODE2[0.9, 0.2, 0.4]
```

Out[∘]=
```
{{x → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ],
  y → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ],
  z → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ]}}
```

In[∘]:=
```
ParametricPlot3D[{x[t], y[t], z[t]} /. p3, {t, 0, 200}, PlotRange → 3]
3D παραμετρικό διάγραμμα                          εύρος διαγράμματος
```

Παρατηρούμε την μεγάλη μεταβολή στην δομή των τροχιών. Σε αυτή την περίπτωση, φαίνεται να έχουμε σύγκλιση των τροχιών σε έναν οριακό κύκλο.

In[∘]:=
```
Plot[x[t] /. p3, {t, 0, 200}]
διάγραμμα
```

In[∘]:=
```
Plot[y[t] /. p3, {t, 0, 200}]
διάγραμμα
```

In[∘]:=
```
Plot[z[t] /. p3, {t, 0, 200}]
διάγραμμα
```

Παρατηρούμε από τις γραφικές παραστάσεις την σύγκλιση σε περιοδική λύση, που φαίνεται να επιβεβαιώνει την εμφάνιση του οριακού κύκλου.

(ii)

In[∘]:=
```
Clear["Global`*"]
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων
```

In[∘]:=
```
Solve[z + (y - 0.9) * x == 0 && 1 - 0.2 * y - x^2 == 0 && -x - 0.4 * z == 0, {x, y, z}]
λύση εξισώσεων και ανισώσεων
```

... Solve: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result.

Out[∘]=
```
{{x → -0.565685, y → 3.4, z → 1.41421},
 {x → 0., y → 5., z → 0.}, {x → 0.565685, y → 3.4, z → -1.41421}}
```

Άρα τα σταθερά σημεία είναι του παραπάνω συστήματος

In[∘]:=
```
f1[x_, y_, z_] = z + (y - 0.9) * x
```

Out[∘]=
```
x (-0.9 + y) + z
```

In[ ]:=
```
f2[x_, y_, z_] = 1 - 0.2 * y - x^2
```
Out[ ]=
```
1 - x^2 - 0.2 y
```

In[ ]:=
```
f3[x_, y_, z_] = -x - 0.4 * z
```
Out[ ]=
```
-x - 0.4 z
```

In[ ]:=
```
J[x_, y_, z_] = D[{f1[x, y, z], f2[x, y, z], f3[x, y, z]}, {{x, y, z}}]
                 μερική παράγωγος
```
Out[ ]=
```
{{-0.9 + y, x, 1}, {-2 x, -0.2, 0}, {-1, 0, -0.4}}
```

Για το (0,5,0)

In[ ]:=
```
J[0, 5, 0]
```
Out[ ]=
```
{{4.1, 0, 1}, {0, -0.2, 0}, {-1, 0, -0.4}}
```

Για το (-0.565685,3.4,1.41421)

In[ ]:=
```
J[-0.565685, 3.4, 1.41421]
```
Out[ ]=
```
{{2.5, -0.565685, 1}, {1.13137, -0.2, 0}, {-1, 0, -0.4}}
```

Για το (0.565685,3.4,-1.41421)

In[ ]:=
```
J[0.565685, 3.4, -1.41421]
```
Out[ ]=
```
{{2.5, 0.565685, 1}, {-1.13137, -0.2, 0}, {-1, 0, -0.4}}
```

In[ ]:=
```
Eigenvalues[J[0, 5, 0]]
ιδιοτιμές
```
Out[ ]=
```
{3.86556, -0.2, -0.165564}
```

In[ ]:=
```
Eigenvalues[J[-0.565685, 3.4, 1.41421]]
ιδιοτιμές
```
Out[ ]=
```
{1.67797, 0.517083, -0.29505}
```

In[ ]:=
```
Eigenvalues[J[0.565685, 3.4, -1.41421]]
ιδιοτιμές
```
Out[ ]=
```
{1.67797, 0.517083, -0.29505}
```

Δεν ισχύει προφανώς το θεώρημα στο ερώτημα (ε) της Άσκησης 6.

(iii)

In[ ]:=
```
Clear["Global`*"]
```
διαγραφή ορισμών και τιμών συμβόλων

In[ ]:=
```
ODE[a_, b_, c_] :=
 NDSolve[{x'[t] == z[t] + (y[t] - a) * x[t], y'[t] == 1 - b * y[t] - (x[t])^2,
```
αριθμητική λύση διαφορικής εξίσωσης
```
   z'[t] == -x[t] - c * z[t], x[0] == 1, y[0] == 3, z[0] == 2}, {x, y, z}, {t, 0, 1000}]
```

In[ ]:=
```
p1 = ODE[0.9, 0.2, 0.4]
```

Out[ ]=
```
{{x → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ],
  y → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ],
  z → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ]}}
```

In[ ]:=
```
ODE1[a_, b_, c_] := NDSolve[{x'[t] == z[t] + (y[t] - a) * x[t],
```
αριθμητική λύση διαφορικής εξίσωσης
```
   y'[t] == 1 - b * y[t] - (x[t])^2, z'[t] == -x[t] - c * z[t],
   x[0] == 1.001, y[0] == 3.001, z[0] == 2.001}, {x, y, z}, {t, 0, 1000}]
```

In[ ]:=
```
p2 = ODE1[0.9, 0.2, 0.4]
```

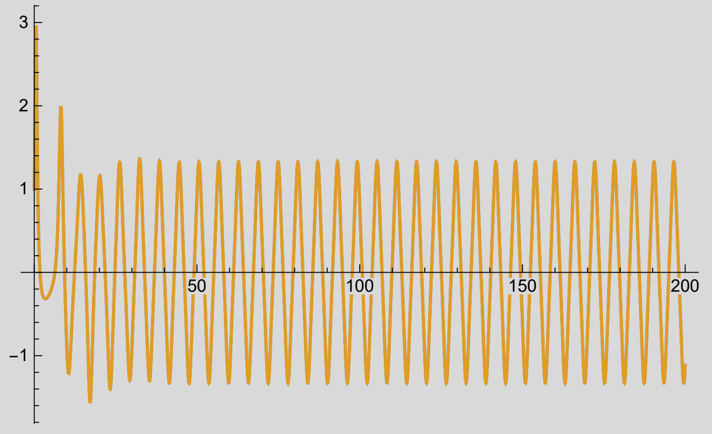
Out[ ]=
```
{{x → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ],
  y → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ],
  z → InterpolatingFunction[ Domain: {{0., 1.00×10^3}} Output: scalar ]}}
```

In[∘]:=

```
PLOT1 = Plot[{{x[t] /. p1}, {x[t] /. p2}}, {t, 0, 200}]
```

διάγραμμα

Out[∘]=

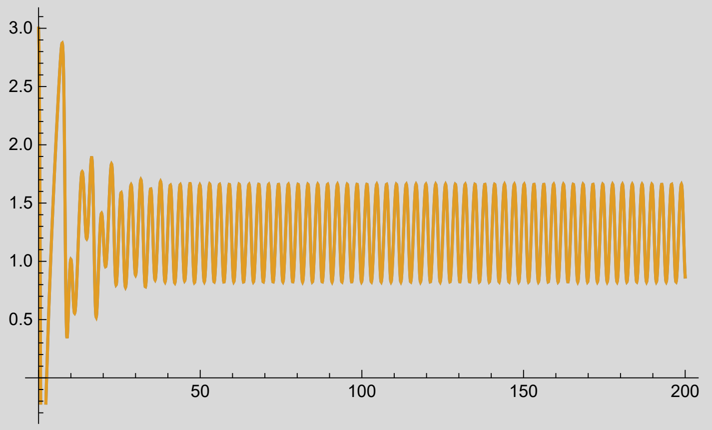


In[∘]:=

```
PLOT2 = Plot[{{y[t] /. p1}, {y[t] /. p2}}, {t, 0, 200}]
```

διάγραμμα

Out[∘]=

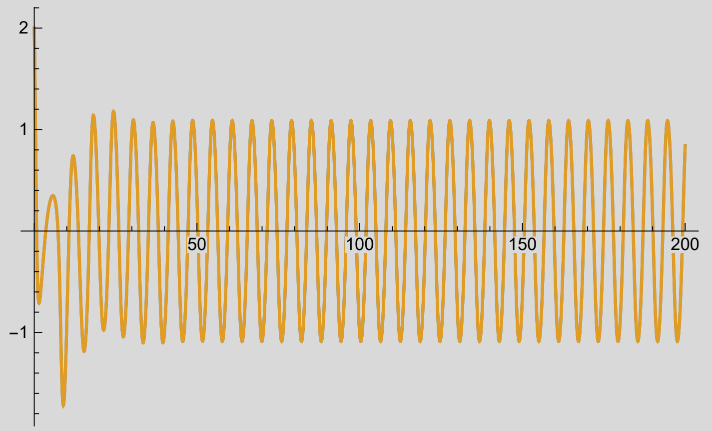


In[∘]:=

```
PLOT3 = Plot[{{z[t] /. p1}, {z[t] /. p2}}, {t, 0, 200}]
```

διάγραμμα

Out[∘]=



Παρατηρούμε ότι οι λύσεις ταυτίζονται, άρα δεν είναι το σύστημα ευαίσθητο ως προς τις αρχικές συνθήκες.
Το γ είναι η ελαστικότητα ζήτησης του εμπορίου και είναι θετική σταθερά.

Ελαστικότητα ζήτησης ως προς την τιμή είναι ένας δείκτης που μετρά το βαθμό στον οποίο η ζητούμενη ποσότητα ενός προϊόντος ανταποκρίνεται στη μεταβολή της τιμής του.