1.1 Πραγματικοί Αριθμοί – 1.2 Συναρτήσεις

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ ΚΑΙ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΕΣ ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΧΟΛΙΚΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 1

Δεδομένο - Ζητούμενο

Εύρεση **πεδίου ορισμού** συνάρτησης

Διαδικασία

Όταν γνωρίζουμε μόνο τον τύπο της συνάρτησης f, τότε το πεδίο ορισμού της είναι το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ο τύπος $f(x)$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Θα βρίσκουμε το πεδίο ορισμού μιας συνάρτησης f θέτοντας κατάλληλους περιορισμούς σύμφωνα με τον επόμενο πίνακα :

Συνάρτηση f	Περιορισμός
$f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$Q(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt[\nu]{P(x)}, \nu \in \mathbb{N}^*-\{1\}$	$P(x)\geq 0$
$f(x)=\ln\big(P(x)\big)$	$P(x)>0$
$f(x)=\varepsilon\varphi\big(P(x)\big)$	$P(x)\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, \kappa\in\mathbb{Z}$
$f(x)=\sigma\varphi\big(P(x)\big)$	$P(x)\neq \kappa\pi, \kappa\in\mathbb{Z}$
$f(x)=\big(P(x)\big)^{Q(x)}$	$P(x)>0$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 2

Δεδομένο - Ζητούμενο
Εύρεση **συνόλου τιμών** συνάρτησης
Διαδικασία
Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f εργαζόμαστε ως εξής : • Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της f. • Θεωρούμε την εξίσωση $y = f(x)$ και τη λύνουμε ως προς x, θέτοντας όπου χρειάζεται περιορισμούς για το y. • Απαιτούμε η λύση x που βρήκαμε παραπάνω να ανήκει στο πεδίο ορισμού της f. • Συναληθεύουμε τους περιορισμούς που έχουν προκύψει για το y και βρίσκουμε έτσι το σύνολο τιμών της f. Το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης μπορεί να βρεθεί πιο εύκολα με τη βοήθεια της μονοτονίας.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 3

Δεδομένο - Ζητούμενο
Εύρεση **σημείων τομής** της γραφικής παράστασης συνάρτησης με τους άξονες.
Διαδικασία
Έστω C_f η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. • Για να βρούμε το σημείο τομής της C_f με τον άξονα $y'y$, βρίσκουμε το $f(0)$, $όταν\ 0 \in D_f$. Σε αυτή την περίπτωση το σημείο τομής της C_f με τον $y'y$ είναι το $A(0, f(0))$. • Για να βρούμε τα σημεία τομής της C_f με τον άξονα $x'x$, λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$. Αν ρ είναι ρίζα της εξίσωσης αυτής, τότε το σημείο $M(\rho, 0)$ είναι σημείο τομής της C_f με τον $x'x$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 4

Δεδομένο - Ζητούμενο
Σχετική θέση γραφικής παράστασης συνάρτησης με τον άξονα $x'x$.
Διαδικασία
Έστω C_f η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f. Η C_f βρίσκεται **πάνω από τον άξονα $x'x$** για τα $x \in D_f$ που είναι λύσεις της ανίσωσης $\boldsymbol{f(x) > 0}$. Η C_f βρίσκεται **κάτω από τον άξονα $x'x$** για τα $x \in D_f$ που είναι λύσεις της ανίσωσης $\boldsymbol{f(x) < 0}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 5

Δεδομένο - Ζητούμενο
Σημεία τομής δύο γραφικών παραστάσεων - **Σχετική θέση** δύο γραφικών παραστάσεων.
Διαδικασία
Έστω C_f και η C_g οι γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων f, g αντίστοιχα. Τα κοινά σημεία των C_f και η C_g έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος : $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$ Η C_f βρίσκεται **πάνω** από τη C_g για τα x που είναι λύσεις της ανίσωσης $\boldsymbol{f(x) < g(x)}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 6

Δεδομένο - Ζητούμενο
Ίσες συναρτήσεις
Διαδικασία
Για να εξετάσουμε αν δύο συναρτήσεις f $και\ g$ είναι ίσες, ακολουθούμε τα εξής βήματα: • Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού D_f, D_g των $f\ και\ g$ και ελέγχουμε αν είναι ίσα. • Εξετάζουμε αν είναι $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$, όπου A είναι το πεδίο ορισμού των $f\ ,g$ $(D_f = D_g = A)$. Αν δεν ισχύει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω προϋποθέσεις, τότε οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες και γράφουμε $f \neq g$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 7

Δεδομένο - Ζητούμενο
Πράξεις με συναρτήσεις
Διαδικασία

Για να ορίσουμε τις συναρτήσεις $f \pm g, f \cdot g, \frac{f}{g}$, όπου f *και* g είναι συναρτήσεις με γνωστό τύπο, ακολουθούμε τα εξής βήματα :

Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού D_f, D_g των f *και* g.

Βρίσκουμε την τομή των D_f, D_g , δηλαδή το σύνολο $A = D_f \cap D_g$ και έστω $A \neq \emptyset$.

Οι συναρτήσεις $f \pm g, f \cdot g$ έχουν πεδίο ορισμού το $A = D_f \cap D_g$ και τύπους :

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

Η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το :

$A = D_f \cap D_g - \{x \in D_g / \ g(x) = 0\}$ και τύπο $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 8

Δεδομένο - Ζητούμενο
Σύνθεση συναρτήσεων
Διαδικασία
Α. Για να ορίσουμε τη σύνθεση $g \circ f$ της συνάρτησης f με τη συνάρτησης g ακολουθούμε τα εξής βήματα : Βρίσκουμε τα πεδία ορισμού D_f και D_g των f $και$ g. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$, δηλαδή το σύνολο: $$D_{g\circ f} = \{x \in D_f \ / f(x) \ \in \ D_f\}$$ Βρίσκουμε τον τύπο της $g \circ f$, από τη σχέση : $$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$ Σημειώνουμε ότι : $$D_{f\circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$$ $$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\}$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ 9

Δεδομένο - Ζητούμενο
Αποσύνθεση συναρτήσεων
Διαδικασία
<u>1η περίπτωση :</u> Όταν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $(f \circ g)(x)$ και $g(x)$, τότε για να βρούμε τη συνάρτηση $f(x)$ εργαζόμαστε ως εξής : • Θέτουμε $g(x) = \alpha$. • Λύνουμε την παραπάνω σχέση ως προς x. • Αντικαθιστούμε το x που βρήκαμε στον τύπο $f\left(g(x)\right)$. **<u>2η περίπτωση :</u>** Όταν γνωρίζουμε τις συναρτήσεις $(f \circ g)(x)$ και $f(x)$, τότε για να βρούμε τη συνάρτηση $g(x)$ εργαζόμαστε ως εξής : • Θέτουμε το x το $g(x)$ στον τύπο της $f(x)$. • Έχουμε τη συνάρτηση $f(g(x))$ με δύο μορφές (μία αυτή που βρήκαμε προηγουμένως και μία από τα δεδομένα). Εξισώνουμε τις δύο αυτές μορφές και βρίσκουμε τη $g(x)$.

Σημαντική παρατήρηση :

Όσο προχωράει η ύλη θα δούμε ότι μπορούμε να βρίσκουμε τα παραπάνω και με άλλα εργαλεία !!

SOS ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΠΟ ΣΧΟΛΙΚΟ ΒΙΒΛΙΟ- Νο 1

Σελίδα 27 - 28 - 29

Ομάδα Α: 1, 2, 3, 7, 8, 10, 11, 12

Άσκηση 1 σελίδα 27

(δείτε μεθοδολογία 1)

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων :

$i)\ f(x) = \dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$ $\quad ii)\ f(x) = \sqrt[3]{x-1} + \sqrt{2-x}$

$iii)\ f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ $\quad iv) f(x) = \ln(1-e^x)$

Λύση

i. Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι 1 και 2. Πρέπει :

$$x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1\ \boldsymbol{και}\ x \neq 2.$$

Άρα, $D_f = (-\infty, 1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$.

ii. Πρέπει :

$$x - 1 \geq 0\ και\ 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$x \geq 1\ και\ x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2\,.\ Άρα:\ Df = [1,2]$$

iii. Πρέπει :

$$x \neq 0\ και\ 1 - x^2 \geq 0$$

$$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

Άρα: $D_f = [-1, 0) \cup (0,1]$.

iv. Πρέπει : $1 - e^x > 0 \Leftrightarrow e^x < 1 \Leftrightarrow e^x < e^0 \Leftrightarrow x < 0$.

$$Άρα:\ D_f = (-\infty, 0)$$

Άσκηση 2 σελίδα 27

(δείτε μεθοδολογία 3)

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν :

i) $f(x) = x^2 - 4x + 3$

ii) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

iii) $f(x) = e^x - 1$

Λύση

Πρέπει :

$i)\ f(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow$

ο x εκτός των ριζών του τριωνύμου, $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$ $x < 1$ ή $x > 3$.

Οπότε : $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$.

$ii)$ $\mathrm{f(x)} > 0 \Leftrightarrow \frac{1+\mathrm{x}}{1-\mathrm{x}} > 0 \Leftrightarrow (1+x)(1-x) > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$

$iii)\ f(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0.$

Άσκηση 3 σελίδα 27

(δείτε μεθοδολογία 5)

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης γ όταν:

$i)\ f(x) = x^3 + 2x + 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x) = x + 1$

$ii)\ f(x) = x^3 + x - 2 \quad \kappa\alpha\iota \quad g(x) = x^2 + x - 2$

Λύση

i) Πρέπει: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + 2x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow$

$x^3 + x > 0 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ αφού:

$x^2 + 1 > 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$

ii) Πρέπει: $f(x) > g(x) \Leftrightarrow x^3 + x - 2 > x^2 + x - 2 \Leftrightarrow$

$x^3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2(x - 1) > 0 \Leftrightarrow x > 1$ αφού:

$x^2 \geq 0 \; \forall \, x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 7 σελ. 28

(δείτε μεθοδολογία 6)

Να εξετάσετε σε ποιες περιπτώσεις είναι $f = g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

i) $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2$

ii) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+|x|}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$

iii) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ και $g(x) = \sqrt{x} + 1$

Λύση

i) $D_f = \mathbb{R}$, $D_g = [0, +\infty)$. Άρα $f \neq g$.

Το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το $[0, +\infty)$, αφού για κάθε $x \in [0, +\infty)$ ισχύει :

$f(x) = \sqrt{x^2} = |x| = x = \left(\sqrt{x}\right)^2 = g(x)$

ii) Για το D_f : Πρέπει:

$x^2 + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|^2 + |x| \neq 0 \Leftrightarrow |x|(|x| + 1) \neq 0 \Leftrightarrow$

$$|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Για το D_g : Πρέπει :

$$|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$$

Άρα $D_f = D_g$.

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+|x|} = \frac{|x|^2-1}{|x|^2+|x|} = \frac{(|x|-1)(|x|+1)}{|x|(|x|+1)} =$$

$$\frac{|x|-1}{|x|} = 1 - \frac{1}{|x|} = g(x), \forall\, x \in \mathbb{R}^*$$

$iii.$

Για το D_f:

Πρέπει $x \geq 0$ και $\sqrt{x} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$ και $\sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 1$

$x \geq 0$ και $x \neq 1$

Άρα: $D_f = [0,1) \cup (1,+\infty)$

$Dg = [0,+\infty)$

Άρα, $f \neq g$.

Για κάθε : $x \in [0,1) \cup (1,+\infty)$ είναι :

$$\text{f}(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \frac{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}{x-1} =$$

$$\sqrt{x}+1 = g(x)$$

Επομένως, το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$ είναι το $[0,1) \cup (1,+\infty)$.

Άσκηση 8 σελίδα 28

(δείτε μεθοδολογία 7)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 + \frac{1}{x}$ $και$ $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις :

$$f+g, \qquad f-g, \qquad fg \;\; και \; \frac{f}{g}$$

Λύση

$D_f = \mathbb{R}^*, \quad D_g = \mathbb{R} - \{1\}, \; D = \mathbb{R} - \{0,1\}$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} = \frac{x(1-x) + 1 - x + x^2}{x(1-x)}$$

$$= \frac{1}{x(1-x)}, \quad x \in D.$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = 1 + \frac{1}{x} - \frac{x}{1-x} = \frac{x(1-x) + 1 - x - x^2}{x(1-x)}$$

$$= \frac{-2x^2+1}{x(1-x)}, x \in D.$$

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) =$$

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x}{1-x} = \frac{x+1}{1-x}, x \in D.$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x + \frac{1}{x}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{\frac{x}{1-x}} = \frac{1-x^2}{x^2}, \quad x \in D, g(x) \neq 0.$$

Άσκηση 10 σελίδα 28

(δείτε μεθοδολογία 8)

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$, αν :

$i)\ f(x) = x^2\ \ και\ g(x) = \sqrt{x}\quad ii)\ \ f(x) = ημx\ \ και\ g(x) = \sqrt{1 - x^2}$

$iii)\ \ f(x) = \frac{\pi}{4}\quad και\ g(x) = εφx$

Λύση

$i)\ D_f = \mathbb{R}\ (πολυωνυμική)$ και $D_g = [0, +\infty)$ αφού πρέπει $x \geq 0$ γιατί βρίσκεται κάτω από ρίζα.

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}/x^2 \in [0, +\infty)\} = \mathbb{R}$

Αφού $x^2 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$

$ii)\ D_f = \mathbb{R}$ και $D_g = [-1,1]$ αφού πρέπει $1 - x^2 \geq 0$ γιατί βρίσκεται κάτω από ρίζα.

Οπότε : $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 \geq -1 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x|^2 \leq 1 \Leftrightarrow$

$|x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R}/ημx \in [-1,1]\} = \mathbb{R}$

Αφού $-1 \leq ημx \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g(ημx) = \sqrt{1 - ημ^2x} = \sqrt{συν^2x} = |συνx|$

$iii)$ Η f είναι πολυωνυμική οπότε το πεδίο ορισμού της είναι :

$D_f = \mathbb{R}$.

Για την $\varepsilon\varphi x = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ πρέπει : $\sigma\upsilon\nu x \neq 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x \neq \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$. Άρα, $D_g = \mathbb{R} - \{\kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, \frac{\pi}{4} \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}.$$

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Άσκηση 11 σελίδα 27

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x - 2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Λύση

Αρχικά, υπολογίζουμε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g. Η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική οπότε το x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι :

$D_f = \mathbb{R}$.

Τώρα για τη g : Κάτω από τη ρίζα μπορούμε να βάλουμε μόνο μη αρνητικούς αριθμούς άρα πρέπει να αποκλείσουμε τους αρνητικούς. Δηλαδή : $x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$. Οπότε το πεδίο ορισμού της g είναι :

$D_g = [2, +\infty)$.

$\boldsymbol{g \circ f}$

Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $g \circ f$:

$$D_{g\circ f} = \{x \in D_f / f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / (x^2 + 1) \in [2, +\infty)\} =$$

$\{x \in \mathbb{R}/x^2 + 1 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{R}/x^2 - 1 \geq 0\}$

Παίρνω ξεχωριστά τη σχέση $x^2 - 1 \geq 0$.

$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x|^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 1$

$D_{g \circ f} = \{x \in \mathbb{R}/x \leq -1$ ή $x \geq 1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Βρίσκουμε τον τύπο της $g \circ f$.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$

(Πηγαίνουμε στον τύπο της g και βάζουμε όπου x to $f(x) = x^2 + 1$.)

$\boldsymbol{f \circ g}$

Αρχικά βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$:

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\} = \{x \in [2, +\infty)/\sqrt{x-2} \in \mathbb{R}\}$

$D_{f \circ g} = [2, +\infty)$

Βρίσκουμε τον τύπο της $f \circ g$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x-2})^2 + 1 = x - 2 + 1 = x - 1$

(Πηγαίνουμε στον τύπο της f και βάζουμε όπου x to $g(x) = \sqrt{x-2}$.)

Άσκηση 12 σελίδα 28

Να εκφράσετε τη συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσοτέρων συναρτήσεων, αν :

$i)\ f(x) = \eta\mu(x^2+1)$ $\qquad$ $ii)\ f(x) = 2\eta\mu^2 3x + 1$

$iii)\ \ f(x) = \ln(e^{2x}-1)$ $\qquad$ $iv)\ \ f(x) = \eta\mu^2(3x)$

Λύση

i. Στην f φαίνονται δύο συναρτήσεις : η $g(x) = x^2+1$ και η $h(x) = \eta\mu x$.

Τότε : $f(x) = (h \circ g)(x) = h\big(g(x)\big) = h(x^2+1) = \eta\mu(x^2+1)$.

ii. Στην f φαίνονται τρεις συναρτήσεις : η $g(x) = 3x$, η $h(x) = \eta\mu x$ και η $\varphi(x) = 2x^2+1$. Τότε : $f(x) = (\varphi \circ h \circ g)(x) = \varphi\Big(h\big(g(x)\big)\Big) = \varphi(\eta\mu 3x) = 2\eta\mu^2 3x + 1$.

iii. Στην f φαίνονται τρεις συναρτήσεις : η $g(x) = 2x$, η $h(x) = e^x - 1$ και η $\varphi(x) = lnx$. Τότε : $f(x) = (\varphi \circ h \circ g)(x) = \varphi\Big(h\big(g(x)\big)\Big) = \varphi(e^{2x}-1) = \ln(e^{2x}-1)$.

Όμως, για να ορίζεται ο $ln(e^{2x}-1)$ πρέπει:

$e^{2x} - 1 > 0 \ \Leftrightarrow e^{2x} > 1 \Leftrightarrow e^{2x} > e^0 \Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

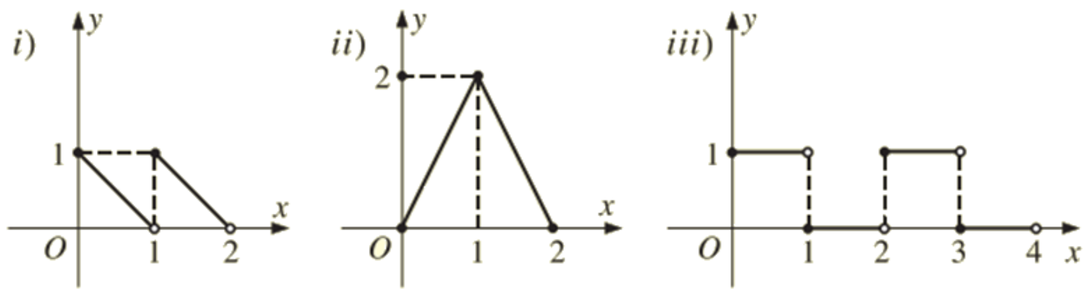
(θυμίζουμε εδώ ότι η e^x είναι γνησίως αύξουσα γι΄ αυτό όταν κατέβηκαν προηγουμένως οι εκθέτες η ανισότητα δεν άλλαξε.

iv. Στην f φαίνονται τρεις συναρτήσεις : η $g(x) = 3x$, η $h(x) = ημx$ και η $φ(x) = x^2$. Τότε : $f(x) = (φ \circ h \circ g)(x) = φ\left(h\big(g(x)\big)\right) =$ $φ(h(3x)) = φ(ημ3x) = ημ^2 3x = f(x)$.

Ομάδα Β: 1, 5, 6, 7, 8

Άσκηση 1 σελίδα 28

Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



Λύση

i) Το πρώτο τμήμα ενώνει τα σημεία : $A(1{,}0)$ $και$ $B(0{,}1)$.

Είναι : $λ_{AB} = \frac{1-0}{0-1} = -1$ και διέρχεται από το A οπότε ανήκει στην ευθεία :

$$y - y_A = λ_{AB}(x - x_A) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x-1) \Leftrightarrow y = -x + 1$$

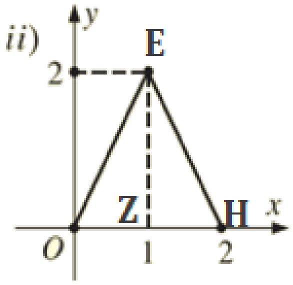
Το δεύτερο τμήμα ενώνει τα σημεία : $Γ(2{,}0)$ $και$ $Δ(1{,}1)$.

Είναι : $λ_{ΓΔ} = \frac{1-0}{1-2} = -1$ και διέρχεται από το Γ οπότε ανήκει στην ευθεία :

$$y - y_Γ = λ_{ΓΔ}(x - x_Γ) \Leftrightarrow y - 0 = -1(x - 2) \Leftrightarrow y = -x + 2$$

Οπότε η συνάρτηση είναι : $f(x) = \begin{cases} -x + 1, 0 \leq x < 1 \\ -x + 2,\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

ii)

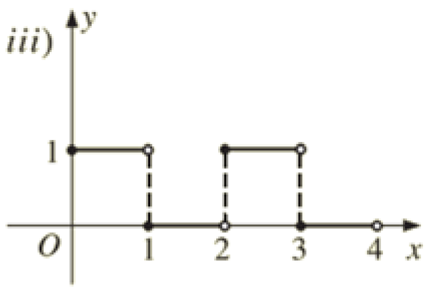


Για το $\boldsymbol{OE}$: $O(0,0)$ *και* $E(1,2)$ οπότε : $λ_{OE} = \frac{2-0}{1-0} = 2$ και διέρχεται από το E. Έτσι η OE είναι : $y - y_E = λ_{OE}(x - x_E) \Leftrightarrow$
$y - 2 = 2(x - 1) \Leftrightarrow y = 2x - 2 + 2 \Leftrightarrow y = 2x$

Για το $\boldsymbol{HE}$: Η$(2,0)$ *και* $E(1,2)$ οπότε : $λ_{HE} = \frac{2-0}{1-2} = -2$ και διέρχεται από το E. Έτσι η HE είναι : $y - y_E = λ_{HE}(x - x_E) \Leftrightarrow$
$y - 2 = -2(x - 1) \Leftrightarrow y = -2x + 2 + 2 \Leftrightarrow y = -2x + 4$

Οπότε η συνάρτηση είναι : $f(x) = \begin{cases} 2x, 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + 4,\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$

iii)



Το πρώτο τμήμα τέμνει τον y στο 1 και είναι παράλληλη στον $x'x$. Άρα, είναι η $y = 1$. Το ίδιο και το τρίτο τμήμα. Τα άλλα δύο βρίσκονται πάνω στον $x'x$ και έχουν εξίσωση $x = 0$.

Έτσι, η συνάρτηση είναι : $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \text{ ή } 2 \leq x < 3 \\ 0, & 1 \leq x < 2 \text{ ή } 3 \leq x < 4 \end{cases}$

Άσκηση 5 σελίδα 28

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση :

$i)\ f(x) = \frac{|x+1|+|x-1|}{2} \quad ii)\ f(x) = \frac{\eta\mu x+|\eta\mu x|}{2},\ x \in [0,2\pi]$

Από τη γραφική παράσταση της f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

Λύση

i) Για $\boldsymbol{x < -1}$, η f γίνεται : $f(x) = \frac{-x-1-x+1}{2} = -\frac{2x}{2} = -x$, αφού για $x < -1 \Leftrightarrow x + 1 < 0$, $\kappa\alpha\iota\ x < -1 \Leftrightarrow x - 1 < -1 - 1 \Leftrightarrow x - 1 < -2 < 0$

Για $\boldsymbol{-1 \leq x < 1}$, η f γίνεται : $f(x) = \frac{x+1-x+1}{2} = \frac{2}{2} = 1$, αφού : $x \geq -1 \Leftrightarrow x + 1 \geq 0\ \ \kappa\alpha\iota\ x < 1\ \Leftrightarrow x - 1 < 0$

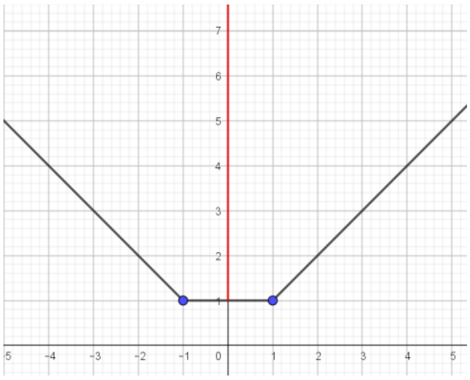
Για $\boldsymbol{x \geq 1}$, η f γίνεται : $f(x) = \frac{x+1+x-1}{2} = \frac{2x}{2} = x$.

Για $x < -1$, $f(x) = -x$ η οποία είναι η διχοτόμος της 2ης γωνίας.

Για $-1 \leq x < 1, f(x) = 1$ η οποία είναι σταθερή συνάρτηση και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία παράλληλη στον $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο 1. Απλώς θα κρατήσουμε μόνο το κομμάτι ανάμεσα στο -1 και 1.

Για $x \geq 1, f(x) = x$ η οποία είναι η διχοτόμος της 1ης γωνίας.

Οπότε, η γραφική της παράσταση είναι :



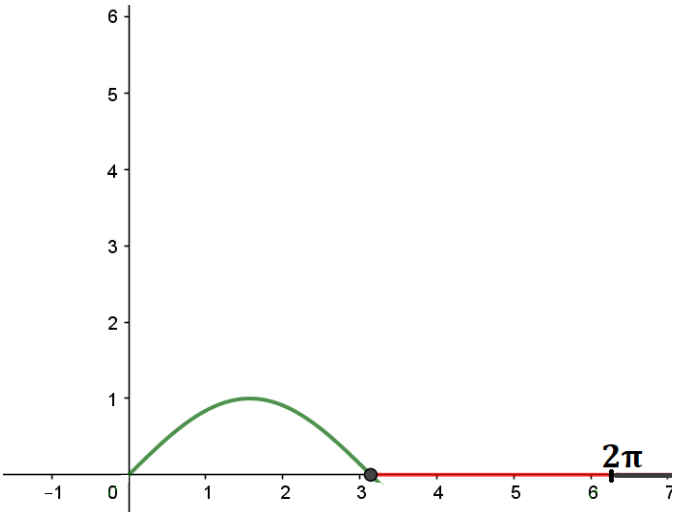
Από το σχήμα φαίνεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

ii)

Όταν : $0 \leq x \leq \pi : f(x) = \frac{\eta\mu x + \eta\mu x}{2} = \eta\mu x.$

Όταν : $\pi \leq x \leq 2\pi : f(x) = \frac{\eta\mu x - \eta\mu x}{2} = 0.$

Η γραφική παράσταση είναι :



Από το σχήμα φαίνεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[0,1]$.

Άσκηση 6 σελίδα 28

(δείτε μεθοδολογία 9)

Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια, ώστε να ισχύει :

i) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = x + 1$.

ii) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1 + x^2}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = -x^2$.

iii) $(g \circ f)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Λύση

i) $D_{f \circ g} = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$

Θέτουμε : $y = g(x) = x + 1, \text{οπότε} : x = y - 1, y \in \mathbb{R}$.

$(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2 \Rightarrow f\big(g(x)\big) = (y-1)^2 + 2(y-1) + 2 \Longrightarrow$

$f(y) = y^2 - 2y + 1 + 2y - 2 + 2 \Longrightarrow f(y) = y^2 + 1, y \in \mathbb{R}$.

Οπότε : $f(x) = x^2 + 1, x \in \mathbb{R}$.

ii) $D_{f \circ g} = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$

Θέτουμε : $y = g(x) = -x^2 \leq 0, \ \text{οπότε} : x^2 = -y, y \in (-\infty, 0]$.

$(f \circ g)(x) = \sqrt{1 + x^2} \Longrightarrow$

$(f\big(g(x)\big) = \sqrt{1 - y} \Longrightarrow f(y) = \sqrt{1 - y}, y \in (-\infty, 0]$

$f(x) = \sqrt{1 - x}, x \in (-\infty, 0]$

iii) $D_{g \circ f} = \mathbb{R}, \quad D_g = [-1,1]$ γιατί πρέπει :

$1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$

Στον τύπο $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ θέτουμε όπου x, $f(x)$ $\mu\varepsilon\ x \in \mathbb{R}$ και βέβαια με $f(x) \in [-1,1]$.

$g\big(f(x)\big) = \sqrt{1 - f^2(x)}$, αλλά δίνεται $(g \circ f)(x) = |συνx|, ; araQ$

$|συνx| = \sqrt{1 - f^2(x)} \Rightarrow συν^2x = 1 - f^2(x) \Longrightarrow$

$f^2(x) = 1 - συν^2x \Longrightarrow f^2(x) = ημ^2x \Longrightarrow$

$f(x) = |ημx|, x \in \mathbb{R}$

Άσκηση 7 σελίδα 29

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x + 1$ και g(x)= $αx + 2$. Για ποια τιμή του $α \in \mathbb{R}$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$;

Λύση

Αρχικά, παρατηρούμε ότι : $D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R}$.

$D_{f \circ g} = \{x \in D_g / \ g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$D_{g \circ f} = \{x \in D_f / \ f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

$f \circ g = g \circ f \ \Leftrightarrow (f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) \Leftrightarrow$

$f\big(g(x)\big) = g\big(f(x)\big), \ \forall \ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$ax + 2 + 1 = a(x + 1) + 2 \ \Leftrightarrow$

$ax + 3 = ax + a + 2 \ \Leftrightarrow \boldsymbol{a = 1}$

Άσκηση 9 σελίδα 29

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$f(x) = \frac{αx+β}{x-α}, \ \ με\ β \neq -α^2\ και\ g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$ και

β) $g\big(g(x)\big) = x$, για κάθε $x \in [0,1]$.

Λύση

α) $D_f = \mathbb{R} - \{\alpha\}$

$D_{f\circ f} = \{x \in D_f \; \mu\varepsilon \; f(x) \in D_f\} = \{x \neq \alpha \; \mu\varepsilon \frac{\alpha x+\beta}{x-a} \neq a\}$

$= \{x \neq \alpha \; \mu\varepsilon \; \alpha x + \beta \neq \alpha(x-\alpha)\}$

$= \{x \neq \alpha \; \mu\varepsilon \; \alpha x + \beta \neq \alpha x - a^2\}$

$= \{x \neq a \; \mu\varepsilon \; \beta \neq -\alpha^2\} = \mathbb{R} - \{\alpha\}$

$f\big(f(x)\big) = \frac{af(x)+\beta}{f(x)-a} = \frac{a\frac{(\alpha x+\beta)}{x-a}+\beta}{\frac{\alpha x+\beta}{x-a}-a} = \frac{a(\alpha x+\beta)+\beta(x-a)}{\alpha x+\beta-\alpha(x-a)} =$

$\frac{a^2x + a\beta + \beta x - \beta\alpha}{\alpha x + \beta - \alpha x + a^2} =$

$\frac{a^2x+\beta x}{\beta+\alpha^2} = \frac{x(\alpha^2+\beta)}{\beta+a^2} = x$

β) $D_g = [0,+\infty)$ και $g(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 - 2\sqrt{x} + 1 = \left(1-\sqrt{x}\right)^2$

$D_{g\circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_g\} =$

$\{x \in [0,+\infty)/x - 2\sqrt{x} + 1 \in [0,+\infty)\} =$

$\{x \geq 0 \;/x - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0\} =$

$\{x \geq 0 \;/\sqrt{x}^2 - 2\sqrt{x} + 1 \geq 0\} =$

$\{x \geq 0 \,/ \left(\sqrt{x} - 1\right)^2 \geq 0\} = [0, +\infty)$

$g\left(g(x)\right) = \left(1 - g(x)\right)^2 = \left(1 - \sqrt{\left(1 - \sqrt{x}\right)^2}\right)^2 =$

$\left(1 - |1 - \sqrt{x}|\right)^2 = [1 - (1 - \sqrt{x})]^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$

Παρατήρηση : Είναι : $|1 - \sqrt{x}| = 1 - \sqrt{x}$ γιατί :

$x \in [0,1] \Longrightarrow 0 \leq x \leq 1 \Longrightarrow 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \Longrightarrow 1 - \sqrt{x} \geq 0$