Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^4 - x^3 - 18x^2 + 3x + 9 = 0 \ .$$

Λύση.

Μία πρώτη παρατήρηση είναι ότι οι ακέραιοι αριθμοί $\pm 1, \pm 3, \pm 9$ που είναι διαιρέτες του σταθερού όρου δεν ικανοποιούν την εξίσωση. Επομένως πρέπει να εργαστούμε με κατάλληλο μετασχηματισμό και παραγοντοποίηση. Παρατηρούμε ότι το $x = 0$ δεν είναι λύση της εξίσωσης. Για $x \neq 0$ μπορούμε να διαιρέσουμε τα δύο μέλη της εξίσωσης με το x^4**,** οπότε προκύπτει η ισοδύναμη εξίσωση:

$$x^2 - x - 18 + \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{9}{x^2}\right) - \left(x - \frac{3}{x}\right) - 18 = 0 \qquad (1)$$

Θέτουμε $x - \dfrac{3}{x} = \omega$, οπότε $x^2 + \dfrac{9}{x^2} - 6 = \omega^2 \Rightarrow x^2 + \dfrac{9}{x^2} = \omega^2 + 6$. Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε την εξίσωση

$$\omega^2 + 6 - \omega - 18 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - \omega - 12 = 0 \Leftrightarrow \omega = 4 \text{ ή } \omega = -3.$$

Άρα έχουμε;

$$x - \frac{3}{x} = 4 \text{ ή } x - \frac{3}{x} = -3 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \text{ ή } x^2 + 3x - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{28}}{2} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{7} \text{ ή } x = \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}.$$

Πρόβλημα 2

Αν ο πενταψήφιος ακέραιος $\mathrm{A} = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0} = \alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0.$ να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot \mathrm{A}$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά $9 \cdot \mathrm{A} = 10 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A}$ έχουμε ότι

$$9 \cdot \mathrm{A} = 10 \cdot \mathrm{A} - \mathrm{A} = \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0 0} - \overline{\alpha_4\alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0}$$

$$= \left(\alpha_4 \cdot 10^5 + \alpha_3 \cdot 10^4 + \alpha_2 \cdot 10^3 + \alpha_1 \cdot 10^2 + \alpha_0 \cdot 10\right) - \left(\alpha_4 \cdot 10^4 + \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0\right)$$

$$= \alpha_4 \cdot 10^5 + \left(\alpha_3 - \alpha_4\right) \cdot 10^4 + \left(\alpha_2 - \alpha_3\right) \cdot 10^3 + \left(\alpha_1 - \alpha_2\right) \cdot 10^2 + \left(\alpha_0 - \alpha_1\right) \cdot 10 - \alpha_0$$

$$= \alpha_4 \cdot 10^5 + \left(\alpha_3 - \alpha_4\right) \cdot 10^4 + \left(\alpha_2 - \alpha_3\right) \cdot 10^3 + \left(\alpha_1 - \alpha_2\right) \cdot 10^2 + \left(\alpha_0 - \alpha_1 - 1\right) \cdot 10 + (10 - \alpha_0)$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0,$ ο αριθμός $9 \cdot \mathrm{A}$ έχει τα ψηφία $\alpha_4, \alpha_3 - \alpha_4, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_0 - \alpha_1 - 1, 10 - \alpha_0$, τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

Σημείωση: Η αφαίρεση $10\cdot A - A$ μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > 0,$ ως εξής:

$$
\begin{array}{rcccccc}
 & & & & & 1 & \\
 & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 & 0 \\
- & & \alpha_4 & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_0 \\
\hline
 & \alpha_4 & \alpha_3-\alpha_4 & \alpha_2-\alpha_3 & \alpha_1-\alpha_2 & \alpha_0-\alpha_1-1 & 10-\alpha_0,
\end{array}
$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Πρόβλημα 3

Αν οι αριθμοί x, y, z είναι θετικοί ακέραιοι, να λύσετε το σύστημα:

$$
\begin{aligned}
x+2y^2 &= 3z^3 \\
y+2z^2 &= 3x^3 \\
z+2x^2 &= 3y^3
\end{aligned}
$$

Λύση

Ας υποθέσουμε ότι ο z είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τους άλλους δύο αγνώστους, δηλαδή $z \geq \max\{x, y\}$. (Οι άλλες περιπτώσεις αντιμετωπίζονται ομοίως).

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $z > 1.$ Τότε , αφού $z \geq \max\{x, y\}$, θα είναι $x+2y^2 < z+2z^2 < 3z^3$, άτοπο.
- $z = 1.$ Τότε $x+2y^2 = 3$ και αφού $1 \geq \max\{x, y\}$ έπεται ότι η τελευταία ισότητα ισχύει, αν και μόνον αν $x = y = 1$. Άρα έχουμε τη λύση: $(x, y, z) = (1,1,1)$.

Αυτή είναι η μοναδική λύση του συστήματος, αφού οι περιπτώσεις με $y \geq \max\{x, z\}$ ή $x \geq \max\{y, z\}$ οδηγούν στην ίδια λύση.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ (με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ και $ΑΒ < ΓΔ$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η εφαπτομένη στο B του κύκλου (c) τέμνει την ευθεία $ΔΓ$ στο σημείο E. Έστω Μ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) Η ευθεία $ΑΔ$ είναι εφαπτομένη του περιγεγραμμένου κύκλου, έστω (c_1), του τριγώνου $ΔΒΕ$.

(β) Το σημείο Μ ανήκει στον περιγεγραμμένο κύκλο, έστω (c_2), του τριγώνου $ΟΒΓ$.

(γ) Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΔΒΕ$ και $ΟΒΓ$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο B.

Λύση

(α) Επειδή το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο θα ισχύουν οι ισότητες γωνιών:

$$\hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1, \hat{Γ}_2 = \hat{Δ}_2.$$

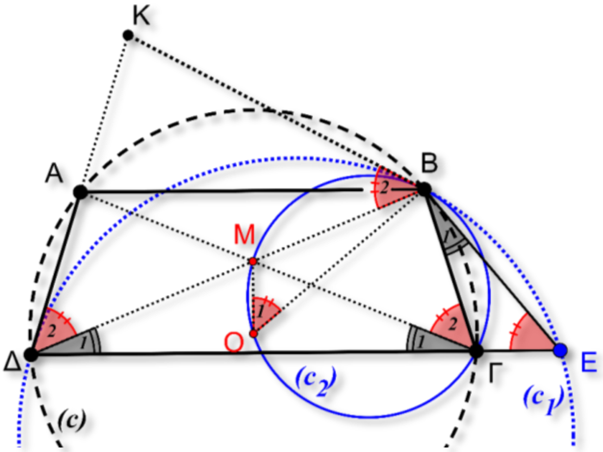
Επίσης, επειδή η BE εφάπτεται στον κύκλο (c), θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{Δ}_1$ (γωνία από τη χορδή $ΒΓ$ και την εφαπτόμενη $ΒΕ$). Άρα έχουμε

$$\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1 \qquad (1).$$

Έστω (c_1) και (c_2) οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων $ΔΒΕ$ και $ΟΒΓ$, αντίστοιχα. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{Δ}_2$ (που δημιουργείται από τη χορδή $ΒΔ$ και την $ΑΔ$) είναι ίση με την γωνία $\hat{E}$, οπότε η $ΑΔ$ θα εφάπτεται στον κύκλο (c_1). Πράγματι, η γωνία $Β\hat{Γ}Δ$ είναι εξωτερική του τριγώνου $ΒΓΕ$, οπότε:

$$Β\hat{Γ}Δ = \hat{B}_1 + \hat{E} \Leftrightarrow \hat{Γ}_1 + \hat{Γ}_2 = \hat{B}_1 + \hat{E}$$

και επειδή $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1 = \hat{Δ}_1$, καταλήγουμε στις ισότητες: $\hat{Γ}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{E}$.



Σχήμα 5

(β) Θα αποδείξουμε ότι το σημείο τομής M των διαγωνίων του ισοσκελούς τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ ανήκει στον κύκλο (c_2). Αρκεί να αποδείξουμε ότι το τετράπλευρο $ΒΓΟΜ$ είναι εγγράψιμο.

Πράγματι, η $ΟΜ$ είναι μεσοκάθετος της $ΑΒ$, οπότε:

$$Μ\hat{O}Β = \hat{M}_1 = \frac{Α\hat{O}Β}{2} = Α\hat{Γ}Β = \hat{Γ}_2.$$

Επομένως, το τετράπλευρο $ΒΓΟΜ$ είναι εγγράψιμο.

(γ) Θεωρούμε την εφαπτόμενη του κύκλου (c_1) στο σημείο B και έστω ότι τέμνει την προέκταση της $ΑΔ$ στο σημείο K. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία ΒΚ είναι εφαπτομένη και του κύκλου (c_2).

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 \qquad (2)$$

γιατί η $ΚΔ$ είναι εφαπτομένη του (c_1) (όπως αποδείξαμε στα ερώτημα (α))

Ισχύουν όμως οι ισότητες γωνιών: $Κ\hat{B}Μ = \hat{B}_2 = \hat{Δ}_2 = \hat{Γ}_2 = Β\hat{Γ}Μ$. Άρα η $ΒΚ$ εφάπτεται και του κύκλου (c_2).