

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{26\alpha^3\beta^3}{\alpha^6-27\beta^6} = -1$, να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^6 - 27\beta^6 = -26\alpha^3\beta^3 \Leftrightarrow \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = 0. \quad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α, β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 &= \alpha^6 - \alpha^3\beta^3 + 27\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 = \alpha^3(\alpha^3 - \beta^3) + 27\beta^3(\alpha^3 - \beta^3) \\ &= (\alpha^3 + 27\beta^3)(\alpha^3 - \beta^3). \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 &= 0 \Leftrightarrow (\alpha^3 + 27\beta^3)(\alpha^3 - \beta^3) = 0 \\ \Leftrightarrow (\alpha + 3\beta)(\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2)(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha + 3\beta = 0 \text{ ή } \alpha - \beta = 0 &\Leftrightarrow \alpha = -3\beta \text{ ή } \alpha = \beta, \end{aligned}$$

αφού $\alpha^2 - 3\alpha\beta + 9\beta^2 = \left(\alpha - \frac{3\beta}{2}\right)^2 + \frac{45\beta^2}{4} > 0$, για $\alpha\beta \neq 0$ (ισχύει από την υπόθεση)

και $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = \left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{3\beta^2}{4} > 0$, για $\alpha\beta \neq 0$.

Αν $\alpha = -3\beta$, τότε $K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{9\beta^2 - \beta^2}{9\beta^2 + \beta^2} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$, ενώ, αν $\alpha = \beta$, τότε

$$K = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{\beta^2 - \beta^2}{\beta^2 + \beta^2} = 0.$$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^6 (αν είναι $\beta = 0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται $0 = 1$, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} \alpha^6 + 26\alpha^3\beta^3 - 27\beta^6 &= 0 \Leftrightarrow \beta^6 \left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^6 + 26\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3 - 27 &= 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 26\omega - 27 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{-26 \pm \sqrt{784}}{2} = \frac{-26 \pm 28}{2} \\ \Leftrightarrow \omega = 1 \text{ ή } \omega = -27 &\Leftrightarrow \alpha^3 = \beta^3 \text{ ή } \alpha^3 = -27\beta^3 \Leftrightarrow \alpha = \beta \text{ ή } \alpha = -3\beta \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο $K = \frac{4}{5}$ ή $K = 0$.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, w είναι όλοι μεγαλύτεροι ή ίσοι του 1 και μικρότεροι ή ίσοι του 5 και επιπλέον ισχύει ότι $x + y + z + w = 8$, να βρείτε τη μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Λύση

Ξεκινώντας από την υπόθεση $1 \leq x \leq 5$, θα έχουμε ότι:

$$1 \leq x \leq 5 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) \leq 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 6x - 5,$$

όπου η ισότητα ισχύει για $x = 1$ ή $x = 5$.

Ομοίως, λαμβάνουμε

$$y^2 \leq 6y - 5, z^2 \leq 6z - 5, w^2 \leq 6w - 5,$$

όπου οι ισότητες ισχύουν μόνον όταν οι y, z, w παίρνουν τις τιμές 1 ή 5.

Προσθέτοντας τις παραπάνω τέσσερις ανισότητες κατά μέλη, έχουμε

$$A = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 \leq 6(x + y + z + w) - 20 = 6 \cdot 8 - 20 = 28.$$

Έχουμε ισότητα όταν ένας από τους αριθμούς ισούται με 5 και οι άλλοι με 1, οπότε η μέγιστη δυνατή τιμή της παράστασης είναι 28.

Πρόβλημα 3

Αν ο τετραψήφιος ακέραιος $A = \overline{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$ έχει ψηφία τέτοια ώστε $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$, να προσδιορίσετε το άθροισμα των ψηφίων του αριθμού $9 \cdot A$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τη διαφορά $9 \cdot A = 10 \cdot A - A$, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} 9 \cdot A &= 10 \cdot A - A = \overline{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0 0} - \overline{\alpha_3 \alpha_2 \alpha_1 \alpha_0} \\ &= (\alpha_3 \cdot 10^4 + \alpha_2 \cdot 10^3 + \alpha_1 \cdot 10^2 + \alpha_0 \cdot 10) - (\alpha_3 \cdot 10^3 + \alpha_2 \cdot 10^2 + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0) \\ &= \alpha_3 \cdot 10^4 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 10^3 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot 10^2 + (\alpha_0 - \alpha_1) \cdot 10 - \alpha_0 \\ &= \alpha_3 \cdot 10^4 + (\alpha_2 - \alpha_3) \cdot 10^3 + (\alpha_1 - \alpha_2) \cdot 10^2 + (\alpha_0 - \alpha_1 - 1) \cdot 10 + (10 - \alpha_0) \end{aligned}$$

οπότε, λόγω των υποθέσεων $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$, ο αριθμός $9 \cdot A$ έχει τα ψηφία $\alpha_3, \alpha_2 - \alpha_3, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_0 - \alpha_1 - 1, 10 - \alpha_0$, τα οποία έχουν άθροισμα ίσο με 9.

Σημείωση: Η αφαίρεση $10A - A$ μπορεί να γίνει και κατακόρυφα με το συνήθη τρόπο, αφού λάβουμε υπόψη ότι $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > 0$, ως εξής:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0 \quad 0 \\ - \quad \alpha_3 \quad \alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0 \\ \hline \alpha_3 \quad \alpha_2 - \alpha_3 \quad \alpha_1 - \alpha_2 \quad \alpha_0 - \alpha_1 - 1 \quad 10 - \alpha_0, \end{array}$$

οπότε καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ (με $AB < A\Gamma < B\Gamma$) εγγεγραμμένο σε κύκλο $c(O, R)$. Η παράλληλη από το O προς την $A\Gamma$ τέμνει την AB στο σημείο Δ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος, έστω (c_1) , του τριγώνου $A\Delta O$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E και το κύκλο $c(O, R)$ στο σημείο Z . Έστω ότι η DZ τέμνει τον κύκλο $c(O, R)$ στο H . Να αποδείξετε ότι:

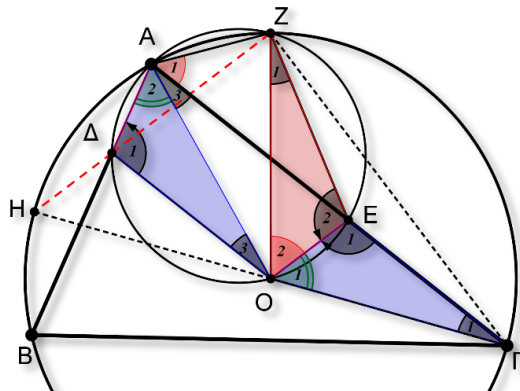
- (α) Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
 (β) Τα τρίγωνα OZE και $O\Gamma E$ είναι ίσα.
 (γ) Τα σημεία Γ, O, H είναι συνευθειακά.

Λύση

(α) Επειδή $O\Delta \parallel AE$ το τετράπλευρο $A\Delta OE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, οπότε $A\Delta = OE$.

Τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma E$ έχουν:

- (1) $A\Delta = OE$ (από το ισοσκελές τραπέζιο $A\Delta OE$).
- (2) $OA = O\Gamma$ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$).
- (3) Το τρίγωνο OAG είναι ισοσκελές ($OA = O\Gamma$) οπότε: $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_3$. Η γωνία $\hat{E}_1$ είναι εξωτερική στο τετράπλευρο $A\Delta OE$, οπότε: $\hat{E}_1 = \hat{\Delta}_1$. Από τις δύο τελευταίες ισότητες γωνιών, καταλήγουμε και στην ισότητα: $\hat{O}_1 = \hat{A}_2$



Σχήμα 4

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $O\Delta\Delta$ και $O\Gamma E$.

(β) Τα τρίγωνα $O\Gamma E$ και OZE έχουν:

- (i) $OZ = O\Gamma$ (ακτίνες του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου $AB\Gamma$),
- (ii) η OE είναι κοινή πλευρά.
- (iii) Ισχύουν η ισότητα γωνιών:
 $\hat{A}_1 = \hat{O}_2$ (είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο (c_1) και βαίνουν στο τόξο ZE).

$$\hat{A}_1 = \frac{Z\hat{O}\Gamma}{2} = \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2}{2} \quad (\text{η γωνία } \hat{A}_1 \text{ είναι εγγεγραμμένη και στον περιγεγραμμένο}$$

κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$ με αντίστοιχη επίκεντρη την $\Gamma\hat{O}Z$), οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{O}_2 = \frac{\hat{O}_1 + \hat{O}_2}{2} \Rightarrow \hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 2\hat{O}_2 \Rightarrow \hat{O}_1 = \hat{O}_2.$$

Από τις σχέσεις (i), (ii) και (iii) προκύπτει ότι τα τρίγωνα $O\Gamma E$ και OZE είναι ίσα.

(γ) Τελικά, από τις προηγούμενες ισότητες τριγώνων, έχουμε ότι και τα τρίγωνα $O\Delta\Delta$ και OZE είναι ίσα, οπότε $O\Delta = EZ$. Επομένως το τετράπλευρο $O\Delta ZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και $DZ \parallel OE$.

Από την ισότητα των τριγώνων $ΟΓΕ$ και $ΟΖΕ$ προκύπτουν οι δύο παρακάτω ισότητες τμημάτων $ΟΖ = ΟΓ$ και $ΕΖ = ΕΓ$, από τις οποίες προκύπτει ότι η $ΟΕ$ είναι μεσοκάθετη της $ΓΖ$. Άρα και η $ΔΖ$ θα είναι κάθετη στην $ΓΖ$, δηλαδή το σημείο $Η$ είναι το αντιδιαμετρικό του σημείου $Γ$, οπότε τα σημεία $Γ, Ο, Η$ είναι συνευθειακά.