Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x που ικανοποιούν συγχρόνως την εξίσωση $(x-1)\left(x^2-7x+10\right)=0$ και την ανίσωση $\frac{x(x-1)}{2}-2<\frac{x(x-5)}{2}+6$.

Λύση

Θα λύσουμε την εξίσωση και την ανίσωση και θα επιλέξουμε τους ακέραιους που ικανοποιούν και τις δύο. Για την εξίσωση έχουμε:

$$(x-1)\left(x^2-7x+10\right)=0 \Leftrightarrow x-1=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=5,$$

αφού η διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι $\Delta=(-7)^2-4\cdot1\cdot10=9>0$.

Για την ανίσωση έχουμε

$$\frac{x(x-1)}{2}-2<\frac{x(x-5)}{2}+6 \Leftrightarrow x^2-x-4<x^2-5x+12.$$

$$\Leftrightarrow 5x-x<12+4 \Leftrightarrow 4x<16 \Leftrightarrow x<4.$$

Επομένως. η εξίσωση και η ανίσωση αληθεύουν συγχρόνως για $x=1$ ή $x=2$.

Πρόβλημα 2

Αν οι πραγματικοί αριθμοί α,β είναι τέτοιοι ώστε $\frac{5\alpha^2\beta^2}{\alpha^4-36\beta^4}=1,$ να βρείτε τις δυνατές τιμές της παράστασης

$$\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}.$$

Λύση

Από τη δεδομένη σχέση έχουμε ότι:

$$\alpha^4-36\beta^4=5\alpha^2\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0. \qquad (1)$$

Για να προκύψει απλούστερη σχέση μεταξύ των α,β πρέπει να γίνει παραγοντοποίηση της παράστασης $\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4$. Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Στον πρώτο τρόπο προσπαθούμε να χωρίσουμε την παράσταση σε ομάδες με κατάλληλη διάσπαση ενός όρου της σε δύο. Έτσι έχουμε

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=\alpha^4-9\alpha^2\beta^2+4\alpha^2\beta^2-36\beta^4=\alpha^2\left(\alpha^2-9\beta^2\right)+4\beta^2\left(\alpha^2-9\beta^2\right)$$
$$=\left(\alpha^2-9\beta^2\right)\left(\alpha^2+4\beta^2\right)$$

Επομένως έχουμε

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0 \Leftrightarrow \left(\alpha^2-9\beta^2\right)\left(\alpha^2+4\beta^2\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^2-9\beta^2=0 \Leftrightarrow \alpha=3\beta \text{ ή } \alpha=-3\beta.$$

Αν $\alpha=3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{3\beta-\beta}{3\beta+\beta}=\frac{1}{2}$, ενώ

Αν $\alpha=-3\beta,$ τότε $\mathrm{K}=\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}=\frac{-3\beta-\beta}{-3\beta+\beta}=\frac{-4}{-2}=2.$

Στο δεύτερο τρόπο διαιρούμε την παράσταση με β^4 (αν είναι $\beta=0$, τότε η δεδομένη ισότητα γίνεται 0 = 1`, άτοπο), οπότε η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha^4-5\alpha^2\beta^2-36\beta^4=0 \Leftrightarrow \beta^4\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4-5\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-36\right)=0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^4-5\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2-36=0$$

$$\overset{\frac{\alpha}{\beta}=\omega}{\Longleftrightarrow} \omega^4-5\omega^2-36=0 \Leftrightarrow \left(\omega^2\right)^2-5\omega^2-36=0 \Leftrightarrow \omega^2=\frac{5\pm\sqrt{169}}{2}=\frac{5\pm 13}{2}$$

$\Leftrightarrow \omega^2=9$ ή $\omega^2=-4$ (απορρίπτεται) $\Leftrightarrow \omega=3$ ή $\omega=-3 \Leftrightarrow \alpha=3\beta$ ή $\alpha=-3\beta$.

Επομένως έχουμε, όπως και στον πρώτο τρόπο:

Αν $\alpha=3\beta$, τότε $\mathrm{K}=\frac{3\beta-\beta}{3\beta+\beta}=\frac{1}{2}$, ενώ, αν $\alpha=-3\beta$, τότε $\mathrm{K}=\frac{-3\beta-\beta}{-3\beta+\beta}=\frac{-4}{-2}=2$.

Πρόβλημα 3

Να συγκριθούν οι αριθμοί

$$\mathrm{A}=\frac{2}{3}+\frac{2}{6}+\frac{2}{9}+\cdots+\frac{2}{99}$$

και

$$\mathrm{B}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\cdots+\frac{1}{95}+\frac{1}{97}+\frac{1}{98}+\frac{1}{100}$$

Λύση

Παρατηρώντας προσεκτικά τους αριθμούς Α και Β διαπιστώνουμε ότι:

οι προσθετέοι του Α είναι της μορφής $\frac{2}{3\kappa}$, $\kappa=1,2,\ldots,33$, δηλαδή ο Α έχει 33 όρους.

Επίσης διαπιστώνουμε ότι ο Β έχει προσθετέους της μορφής $\frac{1}{\nu}$, όπου το ν παίρνει όλες τις τιμές από το 2 μέχρι το 100, εκτός αυτών που είναι πολλαπλάσια του 3, δηλαδή ο Β έχει $99-33=66$ όρους, δηλαδή έχει διπλάσιους όρους από τον αριθμό Α. Επομένως πρέπει να βρούμε μία ανισωτική σχέση μεταξύ των όρων του Α και των όρων του Β η οποία σε κάθε όρο του Α θα αντιστοιχίζει δύο όρους του Β. Με απλή παρατήρηση βλέπουμε ότι πρέπει να βρούμε τη σχέση μεταξύ του όρου $\frac{2}{3\kappa}$ του Α και του αθροίσματος των όρων $\frac{1}{3\kappa-1}$ και $\frac{1}{3\kappa+1}$ του Β, για $\kappa=1,2,\ldots,33$.

Επειδή βλέπουμε ότι $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}>\frac{2}{3}$, θα αποδείξουμε ότι ισχύει

$$\frac{1}{3\kappa-1}+\frac{1}{3\kappa+1}>\frac{2}{3\kappa},$$

για κάθε $\kappa=1,2,\ldots,33$. Πράγματι, κάνοντας την πρόσθεση στο πρώτο μέλος, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\frac{6\kappa}{9\kappa^2-1}>\frac{2}{3\kappa}$$

ή ισοδύναμα $18k^2>18k^2-2$, που ισχύει για κάθε $\kappa=1,2,\ldots,33$

Επομένως, έχουμε τις 33 ομόστροφες ανισότητες:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}>\frac{2}{3},\ \frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{6},\ \ldots,\frac{1}{98}+\frac{1}{100}>\frac{2}{99}\ ,$$

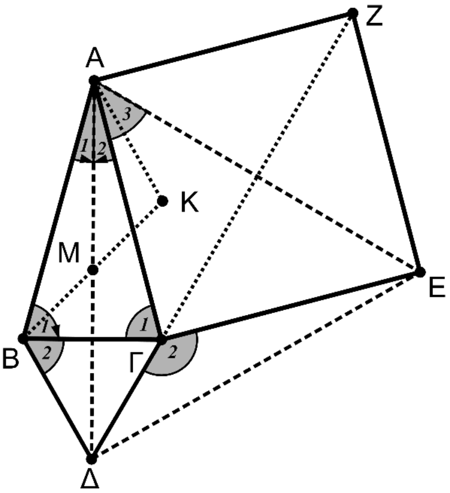
από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη παίρνουμε ότι $\mathrm{B}>\mathrm{A}$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) με $\widehat{A} = 30°$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο ΒΓΔ και τετράγωνο ΑΓΕΖ. Αν το σημείο Μ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Κ είναι το συμμετρικό της κορυφής Β ως προς το σημείο Μ, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

β) Οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το ίδιο σημείο.



Σχήμα 3

Λύση

(α) Επειδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ και $\widehat{A} = 30°$ θα ισχύει: $\widehat{B}_1 = \widehat{\Gamma}_1 = 75°$. Η ΑΔ είναι μεσοκάθετος της ΒΓ, οπότε είναι και διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A} = 30°$, οπότε θα είναι: $\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15°$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ. Αυτά έχουν από τις υποθέσεις:

(i) ΑΒ=ΑΓ=ΓΕ **(ii)** ΒΔ=ΓΔ και επιπλέον για τις περιεχόμενες γωνίες έχουμε:

$$A\widehat{B}\Delta = \widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 75° + 60° = 135° \text{ και}$$

$$\Delta\widehat{\Gamma}E = 360° - \widehat{\Gamma}_1 - 90° - 60° = 360° - 150° - 75° = 135°,$$

δηλαδή ισχύει ότι: **(iii)** $A\widehat{B}\Delta = \Delta\widehat{\Gamma}E = 135°$.

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα και κατά συνέπεια ΑΔ = ΔΕ, οπότε το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. Για τη γωνία $\Delta\widehat{A}E$ του ισοσκελούς τριγώνου ΑΔΕ έχουμε:

$$\Delta\widehat{A}E = \widehat{A}_2 + \widehat{A}_3 = 15° + 45° = 60°,$$

αφού η γωνία $\hat{A}_3$ είναι οξεία γωνία του ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου ΑΓΕ.

Άρα το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο.

(β) Για τη γωνία $\Delta\widehat{\Gamma}Z$ έχουμε: $\Delta\widehat{\Gamma}Z = \widehat{\Gamma}_2 + E\widehat{\Gamma}Z = 135° + 45° = 180°$. Άρα τα σημεία Δ, Γ, Ζ είναι συνευθειακά και επειδή η ΓΖ είναι μεσοκάθετη της ΑΕ, συμπεραίνουμε ότι **η ΔΖ είναι μεσοκάθετη της ΑΕ .**

Επειδή το Μ είναι μέσο της ΑΔ, και το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισόπλευρο, **η ΕΜ θα είναι μεσοκάθετη της ΑΔ** .

Εφόσον το Κ είναι το συμμετρικό του Β ως προς το Μ, ΜΑ=ΜΒ και $B\widehat{M}\Delta = A\widehat{M}K$ τα τρίγωνα ΜΑΚ και ΜΔΒ είναι ίσα, οπότε $B\widehat{\Delta}M = M\widehat{A}K = 30°$. Από τις προηγούμενες ισότητες, συμπεραίνουμε ότι **η ΑΚ είναι διχοτόμος, άρα και μεσοκάθετη του τριγώνου ισόπλευρου τριγώνου ΑΔΕ .**

Επομένως, οι ευθείες ΑΚ, ΕΜ και ΔΓ περνάνε από το σημείο τομής των μεσοκάθετων του ισοπλεύρου τριγώνου ΑΔΕ.