

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ υπάρχει $a \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

$$f(a) = 0 \text{ και } f(f(x)) = xf(x) + a, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Βρείτε όλες τις δυνατές τιμές του a και μία μη μηδενική συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος.

Λύση

Θέτοντας $x = a$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε:

$$f(f(a)) = af(a) + a \Rightarrow f(0) = a.$$

Για $x = 0$ στη δεδομένη σχέση λαμβάνουμε: $f(f(0)) = 0 \cdot f(0) + a \stackrel{(1)}{\Rightarrow} f(a) = a$,

οπότε από τη σχέση $f(a) = 0$ έπεται ότι $a = 0$.

Για $a = 0$ πρέπει να υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f(f(x)) = xf(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Μία συνάρτηση που ικανοποιεί τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να βρεθεί, αν αναζητήσουμε συνάρτηση της μορφής $f(x) = x^c$, $c \in \mathbb{R}$. Τότε πρέπει να ισχύει:

$$f(x^c) = x \cdot x^c \Rightarrow (x^c)^c = x^{c^2} = x^{c+1} \Rightarrow c^2 = c+1 \Rightarrow c^2 - c - 1 = 0 \Rightarrow c = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{Άρα μία συνάρτηση είναι η } f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Πρόβλημα 2

Στο σύνολο των πραγματικών αριθμών να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης

$$x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$\begin{aligned} x^7 + x^6 + x^5 + 1 &= x^5(x^2 + 1) + ((x^2)^3 + 1) = x^5(x^2 + 1) + (x^2 + 1)(x^4 - x^2 + 1) \\ &= (x^2 + 1)(x^5 + x^4 - x^2 + 1) = (x^2 + 1)[x^4(x+1) - (x+1)(x-1)] \\ &= (x^2 + 1)(x+1)(x^4 - x + 1). \end{aligned}$$

Το πολώνυμο $x^2 + 1$ δεν έχει πραγματικές ρίζες. Επίσης, αν το πολώνυμο $x^4 - x + 1$ είχε πραγματική ρίζα, τότε θα υπήρχε $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\alpha^4 - \alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^3 - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) + 1 = 0.$$

Όμως για $\alpha \leq 0$ ή $\alpha \geq 1$ η παράσταση $f(\alpha) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1)$ είναι μη αρνητική, οπότε $f(\alpha) + 1 > 0$.

Για $0 < \alpha < 1$ είναι $\alpha^4 > 0$, $-\alpha + 1 > 0$ και $\alpha^4 - \alpha + 1 > 0$. Επομένως η υπόθεση που κάναμε παραπάνω δεν μπορεί να ισχύει.

Επομένως έχουμε

$$x^7 + x^6 + x^5 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + 1)(x+1)(x^4 - x + 1) = 0 \Leftrightarrow x+1 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 36^\circ$. Ο κύκλος $C_1(\Gamma, \Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ . Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω C_2) τέμνει τον C_1 στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι AE είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} και ότι η $\Delta\Gamma$ εφάπτεται στον περιγεγραμμένο κύκλο του τριγώνου $AB\Gamma$.

Λύση

Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, διότι ΓA και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1 . Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta E$ είναι ισοσκελές, διότι ΓE και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_1 . Άρα:

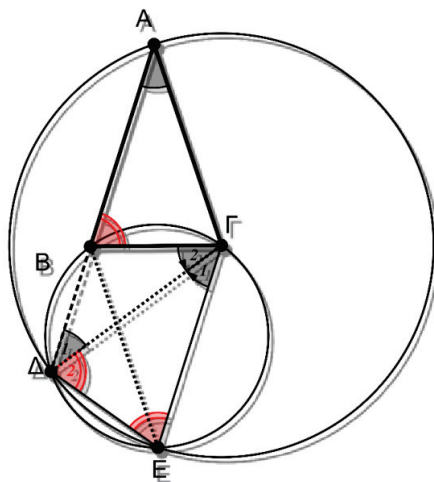
$$\hat{E} = \hat{\Delta}_2 \quad (2).$$

Το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο C_2 . Άρα η εξωτερική του γωνία \hat{B} ισούται με την απέναντι εσωτερική \hat{E} . Άρα:

$$\hat{E} = \hat{B} \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (1), (2), (3) έχουμε: $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = \hat{E} = 36^\circ$.

Άρα $B\Delta \parallel \Gamma E$, οπότε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο και κατά συνέπεια οι διαγωνίες του (BE και $\Gamma\Delta$) θα είναι ίσες. Άρα το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. Δηλαδή τα σημεία E και A ανήκουν στη μεσοκάθετη της βάσης $B\Gamma$ του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ οπότε η AE θα είναι διχοτόμος της γωνίας \hat{A} .



Σχήμα 5

Από την παραλληλία $B\Delta \parallel \Gamma E$ συμπεραίνουμε ότι $\hat{B} = \hat{B}\hat{\Gamma}E = 72^\circ$, οπότε τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ και $EB\Gamma$ είναι ίσα.

Επειδή όμως $\hat{A} = \hat{\Delta}_1 = \hat{E} = \hat{\Gamma}_1 = 36^\circ$ και η $\hat{\Gamma}_2$ σχηματίζεται από τη $B\Gamma, \Delta\Gamma$ (χορδή και εφαπτομένη) συμπεραίνουμε ότι η $\Delta\Gamma$ θα είναι εφαπτομένη.

Πρόβλημα 4

Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $9^{8^{8^9}}$, $8^{9^{9^8}}$.

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Αφού $9 > 8$, αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$8^{8^9} > 9^{9^8} \Leftrightarrow \left(8^{8^9}\right)^{\frac{1}{9^8}} > \left(9^{9^8}\right)^{\frac{1}{9^8}} \Leftrightarrow 8^{\frac{8^9}{9^8}} > 9 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[9]{8^{\frac{8^9}{9^8}}} > 3 \Leftrightarrow 8^{4 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3 \Leftrightarrow 4^{6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8} > 3$$

Τώρα αρκεί να αποδείξουμε ότι $6 \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^8 > 1 \Leftrightarrow 2 \cdot 3 \cdot 2^{24} > 3^{16} \Leftrightarrow 2^{25} > 3^{15} \Leftrightarrow 2^5 > 3^3$, που ισχύει, οπότε ισχύει και η αρχική.

2^{ος} τρόπος. Θα αποδείξουμε ότι $9^{8^{8^9}} > 8^{9^{9^8}}$. Λόγω της μονοτονίας του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι $8^{8^9} \ln 9 > 9^{9^8} \ln 8$. Χρησιμοποιώντας δεύτερη φορά τη μονοτονία του λογαρίθμου, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\ln\left(8^{8^9} \ln 9\right) > \ln\left(9^{9^8} \ln 8\right) \Leftrightarrow 8^9 \ln 8 + \ln(\ln 9) > 9^8 \ln 9 + \ln(\ln 8).$$

Αφού $\ln(\ln 9) > \ln(\ln 8)$, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$8^9 \ln 8 > 9^8 \ln 9 \Leftrightarrow \frac{8^9}{9^8} > \frac{\ln 9}{\ln 8} \Leftrightarrow \frac{2^{27}}{3^{16}} > \frac{2 \ln 3}{3 \ln 2} \Leftrightarrow \frac{2^{26}}{3^{15}} > \frac{\ln 3}{\ln 2}.$$

Θα αποδείξουμε τώρα ότι $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 > \frac{\ln 3}{\ln 2}$, η οποία θα δώσει το ζητούμενο. Πράγματι, η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα αφού $2 \ln 2 = \ln 4 > \ln 3$.

Από την άλλη αρκεί $\frac{2^{26}}{3^{15}} > 2 \Leftrightarrow \frac{2^{25}}{3^{15}} > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2^5}{3^3}\right)^5 > 1 \Leftrightarrow \left(\frac{32}{27}\right)^5 > 1$, που ισχύει.