Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

.

Λύση

Εφόσον ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, θα είναι $\rho \neq 0$ και ισχύει:

$$\rho^3 - \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^3 = \rho + 1 \quad (1).$$

Άρα $(\rho^3)^3 = (\rho+1)^3 \Leftrightarrow \rho^9 = \underbrace{\rho^3}_{\rho+1} + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \rho^9 = \rho + 1 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^9 = 3\rho^2 + 4\rho + 2 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \rho^9 \cdot \rho = (3\rho^2 + 4\rho + 2) \cdot \rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 3 \cdot \rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \rho^{10} = 4\rho^2 + 5\rho + 3.$

$(*)$ ισχύει $\rho \neq 0$.

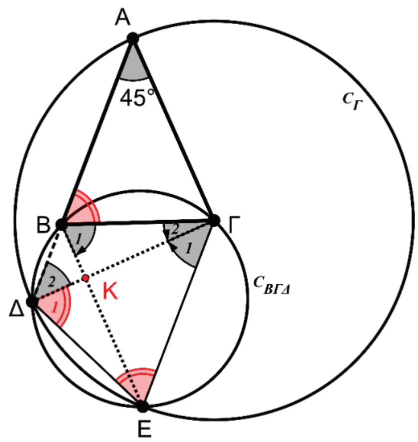
Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ = ΑΓ)$ με $\hat{A} = 45°$. Ο κύκλος $C_Γ(Γ, ΓΑ)$ (που έχει κέντρο το $Γ$ και ακτίνα $ΓΑ$) τέμνει την προέκταση της $ΑΒ$ στο σημείο $Δ$. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $ΒΓΔ$ (έστω $C_{ΒΓΔ}$) τέμνει τον $C_Γ$ στο σημείο $Ε$ Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΒΓΕΔ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Λύση

Το τρίγωνο $ΑΓΔ$ είναι ισοσκελές, διότι $ΓΑ$ και $ΓΔ$ είναι ακτίνες του κύκλου $C_Γ$. Άρα:

$$\hat{Α} = \hat{Δ}_2 = 45^\circ \qquad (1)$$



Σχήμα 4

Το τρίγωνο ΓΔΕ είναι ισοσκελές, διότι ΓΕ και ΓΔ είναι ακτίνες του κύκλου $C_Γ$. Άρα:

$$\hat{Ε} = \hat{Δ}_1 \qquad (2)$$

Το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι εγγεγραμμένο στο κύκλο $C_Γ$. Άρα η εξωτερική του γωνία $\hat{Β}$ ισούται με την απέναντι εσωτερική $\hat{Ε}$. Άρα:

$$\hat{Ε} = \hat{Β} = 67,5^\circ \qquad (3)$$

Από τις σχέσεις (*1*), (*2*), (*3*) έχουμε: $\hat{Α} = \hat{Δ}_2 = \hat{Γ}_1 = 45^\circ$.

Άρα ΒΔ ∥ ΓΕ, οπότε το τετράπλευρο ΒΓΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο ΚΒΔ είναι ορθογώνιο.
Το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές, γιατί ΒΕ=ΔΓ (διαγώνιες του ισοσκελούς τραπεζίου) και ΓΔ = ΓΕ (ακτίνες του $C_Γ$). Άρα τα ισοσκελή τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΒΓ είναι ίσα.
Άρα $\widehat{Β}_1 = Γ_1 + \hat{Γ}_2 = 67{,}5^\circ$ και επειδή $\hat{Γ}_1 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\hat{Γ}_2 = 22{,}5^\circ$ και κατά συνέπεια $\widehat{Β}_1 + \hat{Γ}_2 = 67{,}5^\circ + 22{,}5^\circ = 90^\circ$.

Πρόβλημα 3

Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\nu \geq 2$, ο αριθμός

$$Α = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1}$$

είναι σύνθετος.

Λύση

Ο αριθμητής του κλάσματος παραγοντοποιείται ως εξής:

$$\begin{aligned}\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1 &= \nu^5\left(\nu^2 + 1\right) + \left(\left(\nu^2\right)^3 + 1\right) = \nu^5\left(\nu^2 + 1\right) + \left(\nu^2 + 1\right)\left(\nu^4 - \nu^2 + 1\right)\\ &= \left(\nu^2 + 1\right)\left(\nu^5 + \nu^4 - \nu^2 + 1\right) = \left(\nu^2 + 1\right)\left[\nu^4\left(\nu + 1\right) - \left(\nu + 1\right)\left(\nu - 1\right)\right]\\ &= \left(\nu^2 + 1\right)\left(\nu + 1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).\end{aligned}$$

Επομένως έχουμε

$$Α = \frac{\nu^7 + \nu^6 + \nu^5 + 1}{\nu^2 + 1} = \left(\nu + 1\right)\left(\nu^4 - \nu + 1\right).$$

Για $\nu \geq 2$ είναι $\nu + 1 \geq 3$ και $\nu^4 - \nu + 1 = \nu\left(\nu^3 - 1\right) + 1 \geq 2 \cdot 7 + 1 = 15$, οπότε ο ακέραιος Α είναι σύνθετος.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο στο οποίο η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του. Ποια είναι η ελάχιστη δυνατή τιμή του μήκους της διαγωνίου του;

Λύση
Έστω x, y τα μήκη των πλευρών του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Αφού η αριθμητική τιμή του εμβαδού του ισούται με την αριθμητική τιμή της περιμέτρου του θα έχουμε ότι $xy = 2(x + y)$ (1). Το μήκος της διαγωνίου είναι $d = \sqrt{x^2 + y^2}$. Οπότε θέλουμε να βρούμε την ελάχιστη τιμή του d υπό τη συνθήκη (1).

Έχουμε ότι $d^2 = x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \overset{(1)}{=} (x + y)^2 - 4(x + y)$.
Ισχύει ότι $(x + y)^2 \geq 4xy$ (αφού είναι ισοδύναμη με $(x - y)^2 \geq 0$) και λόγω της (1) έχουμε ότι $4xy = 8(x + y)$, άρα $(x + y)^2 \geq 8(x + y)$, οπότε $x + y \geq 8$. (2)

Θέτουμε $x + y = t$ και τότε $d^2 = t^2 - 4t = (t - 2)^2 - 4 \overset{(2)}{\geq} (8 - 2)^2 - 4 = 32$.
Επομένως η ελάχιστη τιμή του μήκους της διαγωνίου είναι $\sqrt{32}$, και επιτυγχάνεται στο τετράγωνο πλευράς 4.