Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Σε ένα φιλικό παιχνίδι ποδοσφαίρου, ο προπονητής θέλει να χρησιμοποιήσει και τους 16 παίκτες που έχει και να παίξουν όλοι τον ίδιο χρόνο. Αν το παιχνίδι διαρκεί 90 λεπτά και η ομάδα παίζει κάθε στιγμή με 11 ποδοσφαιριστές, είναι δυνατόν όλοι οι ποδοσφαιριστές να παίξουν ακέραιο αριθμό λεπτών;

Λύση

Έστω ότι γίνεται. Ονομάζουμε x τον κοινό χρόνο που έπαιξε ο κάθε ποδοσφαιριστής, όπου x είναι ένας θετικός ακέραιος. Τότε ο συνολικός χρόνος που έπαιξαν όλοι οι ποδοσφαιριστές είναι $16x$. Όμως κάθε στιγμή υπάρχουν 11 ποδοσφαιριστές, άρα ο συνολικός χρόνος που παίζουν οι ποδοσφαιριστές σε έναν αγώνα είναι $90\cdot 11$. Συνεπώς πρέπει $16x = 90\cdot 11$, που δίνει $x = \frac{90\cdot 11}{16} = \frac{45\cdot 11}{8}$, που δεν είναι ακέραιος. Συνεπώς δεν είναι δυνατό όλοι οι παίκτες να παίξουν τον ίδιο ακέραιο αριθμό λεπτών.

Πρόβλημα 2

Να βρεθούν οι τριάδες (x, y, z) ακεραίων αριθμών που είναι τέτοιες ώστε

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4x - 4y + 12z + 6 = 0$$

Λύση

Γράφουμε την δοθείσα στη μορφή

$$(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 - 4y + 1) + (9z^2 + 12z + 4) = 3 \Leftrightarrow$$
$$(x-2)^2 + (2y-1)^2 + (3z+2)^2 = 3$$

Επομένως έχουμε το άθροισμα τριών τετραγώνων ακεραίων να ισούται με τρία. Η μόνη περίπτωση να ισχύει αυτό είναι να έχουμε $(x-2)^2 = (2y-1)^2 = (3z+2)^2 = 1$.
Άρα έχουμε

$$\begin{cases} x-2=1 \text{ ή } x-2=-1 \\ 2y-1=1 \text{ ή } 2y-1=-1 \\ 3z+2=1 \text{ ή } 3z+2=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \text{ ή } x=1 \\ y=1 \text{ ή } y=0 \\ z=-1/3 \text{ (απορρίπτεται) ή } z=-1 \end{cases}$$

Επομένως οι ζητούμενες τριάδες είναι οι $(3,1,-1), (1,1,-1), (3,0,-1), (1,0,-1)$.

Πρόβλημα 3

Γράφουμε θετικό ακέραιο Α χρησιμοποιώντας όσες φορές θέλουμε το ψηφίο 9 και μία φορά το ψηφίο 4. Να προσδιορίσετε τον ελάχιστο δυνατό θετικό ακέραιο Α που μπορούμε να γράψουμε ο οποίος διαιρείται με όσο είναι δυνατόν περισσότερους από τους ακέραιους 2, 3, 4, 5, 6,7, 8, 9.

Λύση

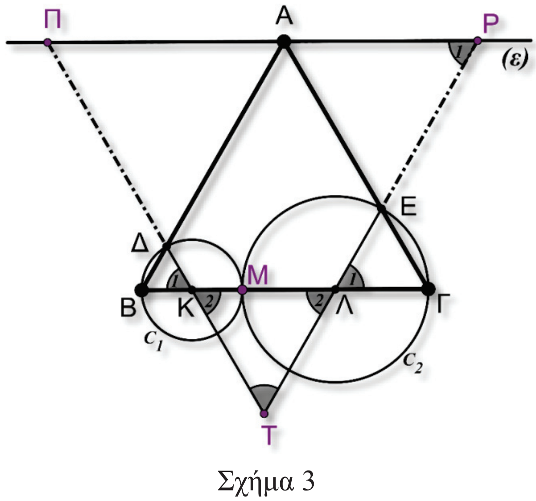
Σύμφωνα με την εκφώνηση πρέπει να χρησιμοποιήσουμε για να γράψουμε τον αριθμό Α μία φορά το ψηφίο 4 και το ψηφίο 9 όσες φορές θέλουμε, έστω $\kappa \geq 1$ φορές. Αποκλείουμε την περίπτωση $\kappa = 0$ γιατί τότε δεν κάνουμε χρήση του ψηφίου 9 όπως απαιτεί η εκφώνηση.

Ο αριθμός που μπορούμε να γράψουμε έχει άθροισμα ψηφίων της μορφής πολ.3+1, οπότε δεν μπορεί να διαιρείται με το 3. Επομένως δεν μπορεί να διαιρείται και με κάποιο πολλαπλάσιο του 3, δηλαδή δεν μπορεί να διαιρείται ούτε με το 6 ή το 9. Επειδή δεν θα λήγει σε 0 ή 5 δεν μπορεί να διαιρείται με το 5. Επίσης, για να διαιρείται με το 4 πρέπει το τελευταίο διψήφιο τμήμα του να διαιρείται με το 4. Επειδή το 4 δεν διαιρεί ούτε το 49 ούτε το 94, ο αριθμός Α δεν μπορεί να διαιρείται με το 4. Επομένως ο Α δεν μπορεί να διαιρείται και με το 8, αφού τότε θα έπρεπε να διαιρείται και με το 4. Επομένως έξι από τους αριθμούς 2,3,…., 9 δεν μπορούν να είναι διαιρέτες του Α.
Για το λόγο αυτό αναζητούμε τον ελάχιστο δυνατό αριθμό Α που διαιρείται με όσο το δυνατό περισσότερους από τους αριθμούς 2,7. Για να διαιρείται με το 2 πρέπει το τελευταίο ψηφίο του Α να είναι το 4. Επειδή ο 94 δεν διαιρείται με το 7 θεωρούμε τον αριθμό 994 ο οποίος διαιρείται και με το 7, οπότε αυτός είναι ο ζητούμενος θετικός ακέραιος.

Πρόβλημα 4
Στη πλευρά $ΒΓ$ ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$, θεωρούμε σημείο $Μ$ (διαφορετικό από το μέσο της $ΒΓ$) και ευθεία (ε) που περνάει από την κορυφή Α και είναι παράλληλη στη $ΒΓ$. Ο κύκλος C_1 (που έχει κέντρο το μέσο $Κ$ του $ΜΒ$ και ακτίνα $ΚΒ$) τέμνει την $ΑΒ$ στο $Δ$. Ο κύκλος C_2 (που έχει κέντρο το μέσο $Λ$ του $ΜΓ$ και ακτίνα $ΛΓ$) τέμνει την $ΑΓ$ στο $Ε$. Οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία $Π$ και $Ρ$ αντίστοιχα. Αν τέλος οι ευθείες $ΚΔ$ και $ΛΕ$ τέμνονται στο σημείο $Τ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $ΠΡΤ$ είναι ισόπλευρο και να υπολογίσετε το εμβαδό του συναρτήσει του μήκους α της πλευράς $ΒΓ$.

Λύση
Πρώτα θα αποδείξουμε ότι το τρίγωνο $ΤΚΛ$ είναι ισόπλευρο. Το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισοσκελές (διότι $ΚΔ, ΚΒ$ ακτίνες του κύκλου C_1). Επειδή όμως $\widehat{B} = 60°$, συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι (τελικά) ισόπλευρο.
Οπότε $\widehat{K}_1 = \widehat{K}_2 = 60°$.
Όμοια καταλήγουμε στην ισότητα $\hat{Λ}_1 = \hat{Λ}_2 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $ΚΒΔ$ είναι ισόπλευρο και κάθε πλευρά έχει μήκος:

$$ΚΛ = ΜΚ + ΜΛ = \frac{ΜΒ}{2} + \frac{ΜΓ}{2} = \frac{ΜΒ + ΜΓ}{2} = \frac{ΒΓ}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$



Σχήμα 3

Εφόσον $AP \not\parallel B\Gamma$, συμπεραίνουμε ότι $\hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60°$. Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο (διότι και $\hat{T} = 60°$).

Το τετράπλευρο $AP\Lambda B$ είναι παραλληλόγραμμο (διότι $\hat{B} = \hat{\Lambda}_1 = \hat{P}_1 = 60°$).

Άρα το τρίγωνο $TP\Pi$ είναι ισόπλευρο με μήκος πλευράς:

$$TP = T\Lambda + \Lambda P = T\Lambda + AB = \frac{\alpha}{2} + \alpha = \frac{3\alpha}{2}.$$

Το εμβαδό του τριγώνου $TP\Pi$ είναι:

$$(TP\Pi) = \frac{\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{9\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, να αποδείξετε ότι ο ρ είναι ρίζα και της εξίσωσης

$$x^{10} - 4x^2 - 5x - 3 = 0.$$

.

Λύση

Εφόσον ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης $x^3 - x - 1 = 0$, θα είναι $\rho \neq 0$ και ισχύει:

$$\rho^3 - \rho - 1 = 0 \Leftrightarrow \rho^3 = \rho + 1 \quad (1).$$

Άρα $(\rho^3)^3 = (\rho+1)^3 \Leftrightarrow \rho^9 = \underbrace{\rho^3}_{\rho+1} + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \rho^9 = \rho + 1 + 3\rho^2 + 3\rho + 1 \Leftrightarrow \rho^9 = 3\rho^2 + 4\rho + 2 \Leftrightarrow$$

$$\overset{(*)}{\Leftrightarrow} \rho^9 \cdot \rho = (3\rho^2 + 4\rho + 2)\cdot \rho \Leftrightarrow \rho^{10} = 3\cdot \rho^3 + 4\rho^2 + 2\rho \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \rho^{10} = 4\rho^2 + 5\rho + 3.$

$(*)$ ισχύει $\rho \neq 0$.

Πρόβλημα 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $\hat{A} = 45°$. Ο κύκλος $C_\Gamma(\Gamma, \Gamma A)$ (που έχει κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA) τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Δ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ (έστω $C_{B\Gamma\Delta}$) τέμνει τον C_Γ στο σημείο E Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο του οποίου οι διαγώνιες τέμνονται κάθετα.

Λύση

Το τρίγωνο $A\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές, διότι ΓA και $\Gamma\Delta$ είναι ακτίνες του κύκλου C_Γ. Άρα:

$$\hat{A} = \hat{\Delta}_2 = 45^\circ \qquad (1)$$