(α) Ισχύει ότι $\frac{\text{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<\frac{3959}{36}<\frac{3960}{36}=110$. Επίσης η μικρότερη τιμή του $\overline{5c3d}$ λαμβάνεται όταν $c = d = 0$, άρα

$$\frac{\text{B}}{45}=\frac{\overline{5c3d}}{45}>\frac{5030}{45}>111.$$

Επομένως, για οποιαδήποτε ψηφία a,b,c,d ισχύει ότι:

$$\frac{\text{A}}{36}=\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}=\frac{\text{B}}{45}.$$

(β) Από το πρώτο ερώτημα ξέρουμε ότι πάντα υπάρχουν δύο ακέραιοι ανάμεσά τους, το 110 και το 111, αφού δείξαμε ότι $\frac{\text{A}}{36}<110<111<\frac{\text{B}}{45}$.

Για να είναι μόνο αυτοί οι ακέραιοι ανάμεσά τους, θα πρέπει

$$109\le\frac{\overline{3a5b}}{36}<110<111<\frac{\overline{5c3d}}{45}\le 112.$$

Από την ανισότητα αριστερά παίρνουμε ότι $\overline{3a5b}>109\cdot 36\Leftrightarrow\overline{3a5b}>3924$, οπότε πρέπει $a=9$ και ο b μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από το 0 μέχρι το 9.

Από την ανισότητα δεξιά παίρνουμε

$$\frac{\overline{5c3d}}{45}\le 112\Leftrightarrow\overline{5c3d}<112\cdot 45\Leftrightarrow\overline{5c3d}<5040,$$

οπότε $c=0$ και το d μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή από 0 μέχρι 9.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε όλες τι ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\le x^3+x+19. \qquad (1)$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9} \qquad (2)$$

Λύση.

Έχουμε:

$$\left(x^2+x+1\right)\left(x-1\right)+5x\le x^3+x+19\Leftrightarrow x^3-x^2+x^2-x+x-1+5x\le x^3+x+19$$

$$\Leftrightarrow x^3-1+5x\le x^3+x+19\Leftrightarrow 4x\le 20\Leftrightarrow x\le 5.$$

$$\frac{2x-1}{3}-\frac{23}{9}>\frac{4x-21}{9}\Leftrightarrow 6x-3-23>4x-21\Leftrightarrow 2x>5\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}.$$

Επομένως, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $\frac{5}{2}<x\le 5$, οπότε οι ακέραιες τιμές του x που τις συναληθεύουν είναι οι τιμές 3 , 4 και 5.

Πρόβλημα 2

Να βρεθεί θετικός ακέραιος $A = \overline{\alpha_\nu \alpha_{\nu-1} \cdots \alpha_1 \alpha_0} = \alpha_\nu \cdot 10^\nu + \alpha_{\nu-1} \cdot 10^{\nu-1} + \ldots + \alpha_1 \cdot 10 + \alpha_0$, $\nu \geq 2$, ο οποίος έχει άθροισμα ψηφίων ίσο με 8, έχει γινόμενο ψηφίων ίσο με 8 και διαιρείται με το 8.

Λύση

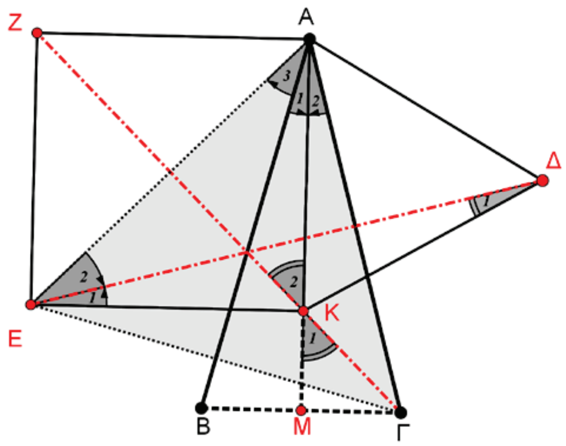
Επειδή τα ψηφία του αριθμού έχουν γινόμενο 8 και άθροισμα 8, αυτά πρέπει να είναι διαιρέτες του 8 που έχουν άθροισμα 8. Οι διαιρέτες του 8 είναι οι θετικοί ακέραιοι 1,2, 4 και 8. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη ότι τα πολλαπλάσια του 8 είναι άρτιοι ακέραιοι, οι δυνατές επιλογές ψηφίων είναι:

- 1,1,2 και 4, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 1124, 1142, 1214, 1412, 2114, 4112.Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 4112 διαιρείται με το 8.
- 1,1,2,2,2, οπότε προκύπτουν οι αριθμοί: 11222, 12122, 12212, 21122, 21212 και 22112 Από αυτούς με έλεγχο διαπιστώνουμε ότι μόνο ο αριθμός Α = 22112 διαιρείται με το 8.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και $\hat{A} = 30^\circ$. Στο ύψος ΑΜ θεωρούμε σημείο Κ ώστε ΜΒ=ΜΓ=ΜΚ. Με βάση την ΑΚ κατασκευάζουμε τετράγωνο ΑΚΕΖ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Β) και ισόπλευρο τρίγωνο ΑΚΔ (στο ημιεπίπεδο με ακμή την ΑΜ, που περιέχει το Γ). Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΕ και ΓΖ, τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Λύση



Σχήμα 3

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΜΓΚ, έχουμε: $\widehat{K}_1 = 45^\circ$.

Από το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΚΖ, έχουμε: $\widehat{K}_2 = 45^\circ$.

Άρα τα σημεία Γ,Κ,Ζ είναι συνευθειακά, οπότε η ΓΖ είναι μεσοκάθετος της ΑΕ **(*)** και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές (ΓΑ=ΓΕ).

Ισχύουν επίσης οι παρακάτω ισότητες γωνιών:

$\widehat{A}_1 = \widehat{A}_2 = 15^\circ$ (διότι $\widehat{A} = 30^\circ$) και $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_3 = 45^\circ$ (διότι $E\widehat{A}K = 45^\circ$).
Άρα $E\widehat{A}\Gamma = 60^\circ$ και κατά συνέπεια το ισοσκελές τρίγωνο ΑΕΓ είναι ισόπλευρο.
Επιπλέον $\widehat{A}_1 + \widehat{A}_2 = 30^\circ = \widehat{A}_3$.
Άρα η ΑΒ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{E\widehat{A}\Gamma}$ **(**)**.
Στο ισοσκελές τρίγωνο ΔΚΕ ισχύει $\Delta\widehat{K}E = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$.
Άρα $\widehat{\Delta}_1 + \widehat{E}_1 = 15^\circ$. Επειδή όμως $\widehat{E}_1 + \widehat{E}_2 = 45^\circ$, καταλήγουμε $\widehat{E}_2 = 30^\circ$,
δηλαδή η ΕΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $\mathbf{A\widehat{E}\Gamma}$ **(***)**.
Από τα συμπεράσματα (*),(**) και (***) καταλήγουμε ότι οι ΔΕ, ΓΖ και ΑΒ συντρέχουν, δηλαδή οι ΔΕ και ΓΖ τέμνονται πάνω στην ΑΒ.

Πρόβλημα 4
Να βρείτε έναν θετικό ακέραιο k, ο οποίος όταν προστεθεί στο γινόμενο

$$A = 2017\cdot 2016\cdot 2015\cdot 2013\cdot 2012\cdot 2011,$$

να μας δώσει άθροισμα ίσο με το τετράγωνο ενός ακεραίου.

Λύση
Θέτουμε $n = 2014$ και τότε έχουμε: $A = (n+3)(n+2)(n+1)(n-1)(n-2)(n-3)$ και θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τον αριθμό Α στη μορφή $A = \varphi(n)^2 - k$, όπου $\varphi(n)$ πολυώνυμο μεταβλητής n με ακέραιους συντελεστές και k θετικός ακέραιος.
Με εκτέλεση των πράξεων, έχουμε:

$$A = (n^2-9)(n^2-4)(n^2-1) = n^6 - 14n^4 + 49n^2 - 36 =$$
$$= n^2(n^4 - 14n^2 + 49) - 36 = n^2(n^2-7)^2 - 36$$

Επομένως, αν στον αριθμό Α προσθέσουμε θετικό ακέραιο $k = 36$, παίρνουμε ότι $A + 36 = n^2(n^2-7)^2 = (n^3 - 7n)^2$, που δίνει έναν θετικό ακέραιο υψωμένο στο τετράγωνο. Άρα μία τιμή για το k είναι η τιμή $k = 36$.

Σημείωση.
Μία σύντομη απάντηση μπορεί να δώσει κάποιος στο πρόβλημα, αν θεωρήσει τον αριθμό $k = B^2 - A$, με $B^2 > A$. Ένας τέτοιος αριθμός είναι ο $k = A^2 - A$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Να προσδιορίσετε την τιμή του ακέραιου αριθμού α για την οποία ο ακέραιος

$$A = \left(\alpha^2 + 18\right)^2 - \left(8\alpha + 1\right)^2$$

είναι πρώτος.

Λύση
Έχουμε

$$A = \left(\alpha^2+18\right)^2 - \left(8\alpha+1\right)^2 = \left(\alpha^2+18+8\alpha+1\right)\left(\alpha^2+18-8\alpha-1\right)$$
$$= \left(\alpha^2+8\alpha+19\right)\left(\alpha^2-8\alpha+17\right) = \left[\left(\alpha+4\right)^2+3\right]\left[\left(\alpha-4\right)^2+1\right].$$