μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓΒ θα είναι $\text{ΕΒ} = \text{ΓΕ} = R$, οπότε το τετράπλευρο ΟΒΕΓ έχει τις τέσσερις πλευρές του ίσες , δηλαδή είναι ρόμβος.

Επιπλέον, έχουμε $\text{ΟΔ} = \text{ΟΓ} \cdot \eta\mu 30^\circ = R \cdot \frac{1}{2} = \frac{R}{2}$, οπότε $(\text{ΟΒΕΓ}) = R \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2}{2}$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν τα συστήματα

$$(\Sigma_1) \begin{Bmatrix} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \\ \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \quad \text{και } (\Sigma_2) \begin{Bmatrix} \alpha x + \beta y = 4 \\ 2\alpha x + 3\beta y = -8 \end{Bmatrix}$$

έχουν την ίδια λύση (x, y), να βρείτε την τιμή των παραμέτρων α και β.

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{x} = \varphi$ και $\frac{1}{y} = \omega$, το σύστημα (Σ_1) γίνεται:

$$\begin{Bmatrix} \varphi + \omega = \frac{1}{4} \\ 3\varphi + 4\omega = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ 3\left(\frac{1}{4} - \omega\right) + 4\omega = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \frac{1}{4} - \omega \\ \omega = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \varphi = \frac{1}{2} \\ \omega = -\frac{1}{4} \end{Bmatrix},$$

οπότε το σύστημα (Σ_1) έχει τη λύση: $(x, y) = \left(\frac{1}{\varphi}, \frac{1}{\omega}\right) = (2, -4)$.

Όμως από την υπόθεση την ίδια λύση έχει και το σύστημα (Σ_2), οπότε θα έχουμε;

$$\begin{Bmatrix} 2\alpha - 4\beta = 4 \\ 4\alpha - 12\beta = -8 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha - 2\beta = 2 \\ \alpha - 3\beta = -2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha - 2\beta = 2 \\ -\beta = -4 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 10 \\ \beta = 4 \end{Bmatrix}.$$

Πρόβλημα 2

Για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y και z ισχύει ότι:

$$z = 2(x + y) \qquad \text{και} \qquad z = 3(x - y).$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $y < x < z$.

(β) Να βρείτε την τριάδα (x, y, z) για την οποία: $x^2 + y^2 + z^2 = 680$.

Λύση

(α) Επειδή $z = 3(x - y) > 0 \Rightarrow x - y > 0$, έπεται ότι $x > y$.

Επίσης από τις δεδομένες ισότητες έχουμε:

$$z = 2(x + y) = 3(x - y) \Leftrightarrow 2x + 2y = 3x - 3y \Leftrightarrow x = 5y,$$

οπότε προκύπτει: $z = 2x + 2y = 12y$, οπότε $z - x = 12y - 5y = 7y > 0$, οπότε $z > x$.

Άρα έχουμε: $z > x > y \Leftrightarrow y < x < z$.

(β) Από τις προηγούμενες σχέσεις, δεδομένου ότι είναι $y > 0$, έχουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 680 \Leftrightarrow 25y^2 + y^2 + 144y^2 = 680 \Leftrightarrow 170y^2 = 680 \Leftrightarrow y^2 = 4 \Leftrightarrow y = 2.$$

Άρα είναι: $(x, y, z) = (10, 2, 24)$.

Πρόβλημα 3
Να βρεθούν οι ακέραιοι x για τους οποίους οι αριθμοί $A=8x+1$ και $B=2x-3$ είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων.

Λύση
Έστω $A=8x+1=\alpha^2$ και $B=2x-3=\beta^2$. Τότε λαμβάνουμε ότι:

$$x=\frac{\alpha^2-1}{8}=\frac{\beta^2+3}{2} \qquad (1)$$

και

$$\alpha^2-4\beta^2=13\ . \qquad (2)$$

Από τη σχέση 92) έχουμε:

$$\alpha^2-4\beta^2=13 \Leftrightarrow (\alpha+2\beta)(\alpha-2\beta)=13$$

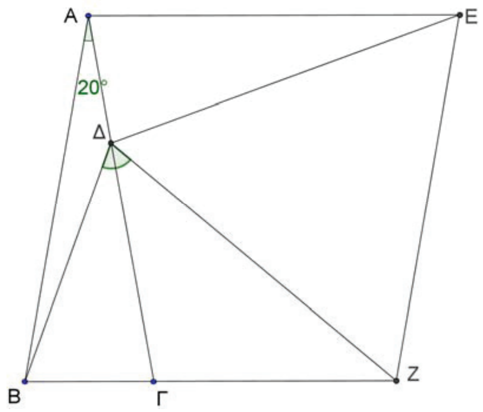
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=13\\ \alpha-2\beta=1\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=-13\\ \alpha-2\beta=-1\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=1\\ \alpha-2\beta=13\end{matrix}\right\} \text{ ή } \left\{\begin{matrix}\alpha+2\beta=-1\\ \alpha-2\beta=-13\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta)=(7,3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(-7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(7,-3) \text{ ή } (\alpha,\beta)=(-7,3).$$

Από όλα τα παραπάνω ζεύγη, από τις σχέσεις (1) προκύπτει ότι: $x=6$.

Πρόβλημα 4
Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ και $\hat{\mathrm{A}}=20^0$. Θεωρούμε σημείο Δ πάνω στην πλευρά ΑΓ τέτοιο ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{B\Gamma}$. Από το σημείο Α φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΑΕ τέτοιο ώστε $\mathrm{AE}\parallel\mathrm{B\Gamma}$, $\mathrm{AE}=\mathrm{AB}$ και με τα σημεία Ε και Δ να βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΒ. Στη συνέχεια κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\mathrm{B\hat{\Delta}Z}$.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή είναι $\hat{\mathrm{A}}=20^\circ$ και $\mathrm{AE}\parallel\mathrm{B\Gamma}$ έχουμε ότι:

$$\mathrm{E\hat{A}\Delta}=\hat{\mathrm{B}}=\hat{\Gamma}=\frac{180^\circ-20^\circ}{2}=80^\circ.$$

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΕΑΔ είναι ίσα, αφού έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία $(\mathrm{AB}=\mathrm{EA},\ \mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Delta})$ και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες $\left(\mathrm{A\hat{B}\Gamma}=\mathrm{E\hat{A}\Delta}=80^\circ\right)$.

Επομένως , έχουμε: $\text{ΕΔ} = \text{ΑΓ} = \text{ΑΒ}$, $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Δ} = 20^\circ$.
Επειδή το παραλληλόγραμμο ΒΑΕΖ έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες $(\text{ΑΕ} = \text{ΑΒ})$, είναι ρόμβος, οπότε $\text{ΕΖ} = \text{ΑΒ} = \text{ΕΔ}$, δηλαδή το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισοσκελές. Επιπλέον, ισχύει: $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ} = \hat{\text{Β}} = 80^\circ$. Επομένως $\text{Δ}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ} = \text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Ζ} - \text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Δ} = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$, οπότε το τρίγωνο ΕΔΖ είναι ισόπλευρο.
Τότε είναι: $\text{Β}\hat{\text{Ζ}}\text{Δ} = \text{Β}\hat{\text{Ζ}}\text{Ε} - \text{Δ}\hat{\text{Ζ}}\text{Ε} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ$, οπότε από το ισοσκελές τρίγωνο ΒΖΔ $(\text{ΖΒ} = \text{ΑΒ} = \text{ΖΔ})$ προκύπτει ότι: $\text{Β}\hat{\text{Δ}}\text{Ζ} = \dfrac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1
Για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό x να αποδείξετε ότι:
$$\frac{9x^2+3x+1}{x} - \frac{27x}{9x^2+3x+1} \geq 6.$$
Για ποιες τιμές του x ισχύει η ισότητα;

Λύση
Επειδή είναι $x > 0$ θα είναι και $9x^2+3x+1 > 0$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι:
$$\left(9x^2+3x+1\right)^2 - 27x^2 \geq 6x\left(9x^2+3x+1\right)$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)^2 - 6x\left(9x^2+3x+1\right) - 27x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+3x+1\right)\left(9x^2-3x+1\right) - 27x^2 \geq 0.$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2 - 9x^2 - 27x^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow \left(9x^2+1\right)^2 - 36x^2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(9x^2-1\right)^2 \geq 0, \text{ που ισχύει.}$$
Η ισότητα ισχύει όταν $9x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{9} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$, αφού $x > 0.$

Πρόβλημα 2
Να υπολογιστούν οι ακέραιοι συντελεστές α, β, γ της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ με $\alpha \neq 0$, αν αυτή έχει ρίζες $x_1 = 1$ και $x_2 = \beta$.

Λύση
Αφού οι αριθμοί 1 και β είναι ρίζες της εξίσωσης, έχουμε:
$$\alpha + \beta + \gamma = 0, \qquad (1)$$
$$\alpha\beta^2 + \beta^2 + \gamma = 0. \qquad (2)$$
Με αφαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) λαμβάνουμε
$$\alpha\left(\beta^2 - 1\right) + \beta(\beta - 1) = 0 \Leftrightarrow (\beta - 1)(\alpha\beta + \alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow \beta = 1 \text{ ή } \alpha\beta + \alpha + \beta = 0.$$
Αν υποθέσουμε ότι είναι $\beta = 1$, τότε $\alpha + \gamma = -1$ και $\alpha + \gamma = 0$, αδύνατο.
Άρα είναι $\beta \neq 1$, οπότε θα είναι:
$$\alpha\beta + \alpha + \beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{\beta}{\beta + 1} = -1 + \frac{1}{\beta + 1}.$$