Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρεθούν οι ακέραιοι x που είναι ρίζες της εξίσωσης $x(x-2)=24$ και το τετράγωνό τους δεν είναι μεγαλύτερο του 25.

Λύση

Η εξίσωση $x(x-2)=24 \Leftrightarrow x^2-2x-24=0$ είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα $\Delta=100$, οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες

$$x=\frac{2\pm 10}{2} \Leftrightarrow x=6 \text{ ή } x=-4.$$

Δεκτή είναι η ρίζα $x=-4$, γιατί $(-4)^2=16<25$, ενώ $6^2=36>25$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)}{(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta},$$

αν $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$.

Λύση

Ο αριθμητής της παράστασης γράφεται:

$$\begin{aligned}
&\alpha^3+\beta^3-\alpha^2+\beta^2+(\alpha\beta+\beta^2)(\alpha-2\beta)\\
&=\alpha^3+\beta^3-(\alpha^2-\beta^2)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)-(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)+\beta(\alpha+\beta)(\alpha-2\beta)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2-\alpha+\beta+\beta\alpha-2\beta^2)\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta)\\
&=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)-(\alpha-\beta)\right]\\
&=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1).
\end{aligned}$$

Ο παρανομαστής της παράστασης γράφεται:

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha-\beta=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)$$

Άρα, αφού $\alpha+\beta\neq 0$ και $\alpha+\beta\neq 1$, έχουμε

$$\mathrm{K}(\alpha,\beta)=\frac{(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)(\alpha+\beta-1)}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta-1)}=\alpha-\beta.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται η εξίσωση $x^2+2\lambda x+\lambda^2-1=0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες μεγαλύτερες του -5 και μικρότερες του 2 και το άθροισμα των τετραγώνων τους είναι ίσο με 20.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι δευτέρου βαθμού και έχει διακρίνουσα

$$\Delta=4\lambda^2-4(\lambda^2-1)=4,$$

οπότε έχει δύο πραγματικές ρίζες $x_1 = -\lambda + 1$ και $x_2 = -\lambda - 1$.

Οι δύο ρίζες ανήκουν στο διάστημα $(-5, 2)$, όταν

$$-5 < -\lambda + 1 < 2 \text{ και } -5 < -\lambda - 1 < 2 \Leftrightarrow -6 < -\lambda < 1 \text{ και } -4 < -\lambda < 3$$
$$\Leftrightarrow -1 < \lambda < 6 \text{ και } -3 < \lambda < 4 \Leftrightarrow -1 < \lambda < 4.$$

Επιπλέον, έχουμε

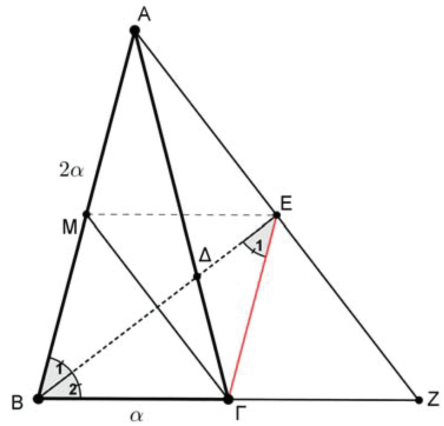
$$(-\lambda + 1)^2 + (-\lambda - 1)^2 = 20 \Leftrightarrow 2\lambda^2 + 2 = 20 \Leftrightarrow \lambda^2 = 9 \Leftrightarrow \lambda = -3 \text{ ή } \lambda = 3,$$

Επομένως, αφού πρέπει $-1 < \lambda < 4$ το ζητούμενο ισχύει για $\lambda = 3$.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΒΓ} = \alpha$ και $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ} = 2\alpha$. Η παράλληλη ευθεία από την κορυφή Γ προς την πλευρά ΑΒ τέμνει την ευθεία της διχοτόμου ΒΔ στο σημείο Ε. Η ευθεία ΑΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 4

Επειδή $\text{ΕΓ} // \text{ΑΒ}$, θα ισχύει $\hat{\text{B}}_1 = \hat{\text{E}}_1$ και αφού η ΒΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{B}}$, θα είναι $\hat{\text{B}}_1 = \hat{\text{B}}_2$. Επομένως έχουμε $\hat{\text{B}}_2 = \hat{\text{E}}_1$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο ΒΓΕ είναι ισοσκελές, δηλαδή: $\text{ΒΓ} = \text{ΓΕ} = \alpha$.

Στη συνέχεια μπορούμε να εργαστούμε με δύο τρόπους.

1ος τρόπος. Λόγω της παραλληλίας των ΕΓ, ΑΒ θεωρούμε τα όμοια τρίγωνα ΕΓΖ και ΑΒΖ, από τα οποία λαμβάνουμε:

$$\frac{\text{ΓΖ}}{\text{ΒΖ}} = \frac{\text{ΕΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\alpha}{2\alpha} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{ΒΖ} = 2 \cdot \text{ΓΖ}$$

Επομένως το σημείο Γ είναι το μέσο της ΒΖ, δηλαδή $\text{ΒΖ} = 2 \cdot \text{ΒΓ} = 2\alpha$. Επειδή είναι και $\text{ΑΒ} = 2\alpha$ το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.

2ος τρόπος. Θεωρούμε το μέσο Μ της ΑΒ. Τότε το τετράπλευρο ΒΓΕΜ είναι ρόμβος, διότι: έχει $\text{ΒΜ} = // \text{ΓΕ} = \alpha$ (οπότε ΒΓΕΜ παραλληλόγραμμο) και $\text{ΒΓ} = \text{ΓΕ} = \alpha$ (δύο διαδοχικές πλευρές ίσες). Άρα $\text{ΜΕ} = \text{ΒΖ}$ και κατά συνέπεια το Ε είναι μέσο του ΑΖ. Επομένως στο τρίγωνο ΑΒΖ, η ΒΕ είναι διχοτόμος και διάμεσος, οπότε το τρίγωνο ΑΒΖ είναι ισοσκελές.