Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να βρείτε τις ακέραιες λύσεις του συστήματος:

$$\left\{\begin{array}{l}(x-10)(x^2-7x+10)=0 \\ \dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{2x-1}{5}<\dfrac{x(x+1)}{2}\end{array}\right\}$$

Λύση

Έχουμε

$$(x-10)(x^2-7x+10)=0 \Leftrightarrow x-10=0 \text{ ή } x^2-7x+10=0$$
$$\Leftrightarrow x=10 \text{ ή } x^2-7x+10=0.$$

Η εξίσωση $x^2-7x+10=0$, έχει το πρώτο μέλος της τριώνυμο με $\alpha=1$, $\beta=-7$, $\gamma=10$, οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=9$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=2$ ή $x=5$.

Διαφορετικά μπορούμε να πούμε ότι η εξίσωση $x^2-7x+10=0$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-7)=-10$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 10. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm1,\pm2,\pm5,\pm10\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 2 και 5.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x-1}{5}<\frac{x(x+1)}{2} \Leftrightarrow 5x^2+5+4x-2<5x^2+5x \Leftrightarrow x>3.$$

Επομένως οι ζητούμενες ακέραιες λύσεις του συστήματος είναι: $x=5$ ή $x=10$.

2. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$\mathrm{A}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}-\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)}.$$

Λύση

Αν θέσουμε

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2} \text{ και } \Gamma(x)=\frac{2(1+x^3)+(1+x)^3}{3(x^2+1)},$$

τότε η παράσταση $\mathrm{A}(x)$ είναι ίση με τη διαφορά $\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)$. Έχουμε:

$$\mathrm{B}(x)=\frac{1+x^4+(1+x)^3+x(1+x)^3}{1+x^2+(1+x)^2}=\frac{1+x^4+1+3x+3x^2+x^3+x(1+3x+3x^2+x^3)}{1+x^2+1+2x+x^2}$$
$$=\frac{2x^4+4x^3+6x^2+4x+2}{2+2x+2x^2}=\frac{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}{1+x+x^2}=\frac{x^4+2x^3+x^2+2x^2+2x+1}{1+x+x^2}$$
$$=\frac{(x^2+x)^2+2(x^2+x)+1}{1+x+x^2}=\frac{(x^2+x+1)^2}{x^2+x+1}=x^2+x+1.$$

$$\Gamma(x)=\frac{2\left(1+x^3\right)+\left(1+x\right)^3}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{3+3x^3+3x^2+3x}{3\left(x^2+1\right)}=\frac{x^3+x^2+x+1}{x^2+1}$$
$$=\frac{x^2\left(x+1\right)+\left(x+1\right)}{x^2+1}=\frac{\left(x+1\right)\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=x+1.$$

Άρα έχουμε:

$$\mathrm{A}(x)=\mathrm{B}(x)-\Gamma(x)=x^2+x+1-(x+1)=x^2.$$

3. **(α)** Αν κ ακέραιος, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa x}{2}+\frac{x}{4}=\kappa\left(x+2\right)-\frac{3\left(\kappa x-1\right)}{4}.$$

(β) Για ποιες τιμές του ακέραιου κ η παραπάνω εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις;

Λύση

(α) Η εξίσωση είναι ισοδύναμη με την

$$2\kappa x+x=4\kappa\left(x+2\right)-3\left(\kappa x-1\right)\Leftrightarrow 2\kappa x+x=4\kappa x+8\kappa-3\kappa x+3\Leftrightarrow \kappa x+x=8\kappa+3$$
$$\Leftrightarrow\left(\kappa+1\right)x=8\kappa+3. \qquad (1)$$

Διακρίνουμε τώρα τις περιπτώσεις:

1. Αν $\kappa=-1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0\cdot x=-5$ και είναι αδύνατη.

2. Αν $\kappa\in\mathbb{Z}-\{-1\}$, δηλαδή, αν ο κ είναι ακέραιος διαφορετικός από το -1, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=\dfrac{8\kappa+3}{\kappa+1}$.

(β) Η εξίσωση έχει ακέραιες λύσεις, όταν είναι

$$x=\frac{8\kappa+3}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\kappa+8-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{8\left(\kappa+1\right)-5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$
$$x=8-\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow\frac{5}{\kappa+1}\in\mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow\kappa+1\in\{-1,1,-5,5\}\Leftrightarrow\kappa\in\{-2,0,-6,4\}.$$

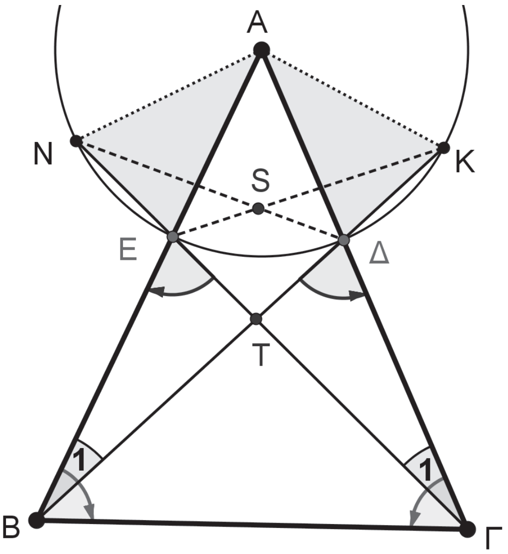
Όλες οι τιμές που βρήκαμε για το κ είναι δεκτές, αφού είναι διαφορετικές του -1.

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ ($\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$). Κύκλος με κέντρο την κορυφή A και ακτίνα $\rho<\mathrm{AB}$ τέμνει τις πλευρές AB και $\mathrm{A\Gamma}$ στα σημεία E και Δ, αντίστοιχα. Οι ευθείες $\mathrm{B\Delta}$, $\Gamma\mathrm{E}$ τέμνουν για δεύτερη φορά το κύκλο στα σημεία K, N αντίστοιχα. Αν T είναι το σημείο τομής των $\mathrm{B\Delta}$, $\Gamma\mathrm{E}$ και S το σημείο τομής των $\Delta\mathrm{N}$, EK, να αποδείξετε ότι τα σημεία A, S και T βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση

Τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{AE\Gamma}$ είναι ίσα γιατί έχουν: (α) $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, (β) $\mathrm{AB}=\mathrm{A\Gamma}$ (πλευρές του ισοσκελούς τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$) και (γ) η γωνία $\hat{\mathrm{A}}$ είναι κοινή για τα δύο τρίγωνα.



Σχήμα 3

Από την ισότητα των τριγώνων $A\Delta B$ και $AE\Gamma$, προκύπτουν οι ισότητες:

- $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και κατά συνέπεια:

$$B\hat{T}\Gamma = \Gamma\hat{T}B. \qquad (1)$$

- $A\hat{\Delta}B = A\hat{E}\Gamma$ και κατά συνέπεια ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών

$$B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma \qquad (2)$$

- $$\Delta B = \Delta\Gamma. \qquad (3)$$

Από την ισότητα (1) των γωνιών $B\hat{T}\Gamma = \Gamma\hat{T}B$ προκύπτει ότι το τρίγωνο $BT\Gamma$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια το σημείο T θα ανήκει στη μεσοκάθετη της $B\Gamma$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $BT\Gamma$ έχουμε: $TB = T\Gamma$ και σε συνδυασμό με την ισότητα (3) συμπεραίνουμε: $TE = T\Delta$.

Από την ισότητα (2) των γωνιών $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Delta}\Gamma$, προκύπτει η ισότητα τω ισοσκελών τριγώνων $A\Delta K$ και AEN. Άρα $\Delta K = EN$ και επειδή $TE = T\Delta$, καταλήγουμε $TK = TN$.

Από τις ισότητες $TE = T\Delta$ και $TK = TN$ συμπεραίνουμε την ισότητα των τριγώνων ETK και ΔTN.

Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει η ισότητα των τριγώνων $SEN = S\Delta K$ και στη συνέχεια η ισότητα $SAE = SAK$, οπότε το σημείο S ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.