Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους που είναι λύσεις του συστήματος εξίσωσης-ανίσωσης

$$x^2-5x=14, \quad \frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}.$$

Λύση

Η εξίσωση $x^2-5x=14$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x(x-5)=14$. Επειδή ζητάμε ακέραιες λύσεις της εξίσωσης, συμπεραίνουμε ότι ο x πρέπει να είναι διαιρέτης του 14. Επομένως θα είναι $x\in\{\pm 1,\pm 2,\pm 7,\pm 14\}$. Με δοκιμές διαπιστώνουμε ότι οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι ακέραιοι 7 και -2.

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε την εξίσωση στη μορφή τριωνύμου

$$x^2-5x-14=0,\ \text{με } \alpha=1,\ \beta=-5,\ \gamma=-14,$$

οπότε είναι $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=81$ και οι ρίζες της εξίσωσης είναι $x=7$ ή $x=-2$.

Στη συνέχεια επιλύουμε την ανίσωση του συστήματος

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x^2-1}{4}<\frac{x(x-1)}{4}\Leftrightarrow 2x-2+x^2-1<x^2-x\Leftrightarrow 3x<3\Leftrightarrow x<1.$$

Επομένως η ζητούμενη ακέραια λύση του συστήματος είναι η $x=-2$.

2. Αν οι α,β,γ είναι πραγματικοί αριθμοί, με κατάλληλο χωρισμό των όρων της σε ομάδες, να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$A=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4.$$

Λύση

$$\begin{aligned}
A&=\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2-\alpha^2\beta^2\gamma^2-2\alpha\beta^3\gamma^2-\beta^4\gamma^2-\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^4\\
&=\left(\alpha^4+2\alpha^3\beta+\alpha^2\beta^2\right)-\left(\alpha^2\beta^2\gamma^2+2\alpha\beta^3\gamma^2+\beta^4\gamma^2\right)-\left(\alpha^2\gamma^2-\beta^2\gamma^4\right)\\
&=\alpha^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\beta^2\gamma^2\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\
&=\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2\right)\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)-\gamma^2\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\\
&=\left(\alpha^2-\beta^2\gamma^2\right)\left(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\gamma^2\right)=\left[\alpha^2-(\beta\gamma)^2\right]\left[(\alpha+\beta)^2-\gamma^2\right]\\
&=(\alpha+\beta\gamma)(\alpha-\beta\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma).
\end{aligned}$$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{x}{2}-1=\frac{4}{y}\ ,\quad \frac{x-1}{2}-\frac{2}{3y}=\frac{5}{3}+\frac{x}{3}.$$

Λύση

Αν θέσουμε $\frac{1}{y}=w$ και απαλείψουμε παρονομαστές, το σύστημα γίνεται:

$$\left\{\begin{matrix} x-8w=2 \\ x-4w=13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2+8w \\ x=13+4w \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2+8w \\ 2+8w=13+4w \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2+8w \\ 8w-4w=13-2 \end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2+8w \\ 4w=11 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2+8\cdot\dfrac{11}{4} \\ w=\dfrac{11}{4} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=2+2\cdot 11 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x=24 \\ w=\dfrac{11}{4} \end{matrix}\right\}.$$

Άρα το σύστημα έχει μοναδική λύση $(x,y)=\left(24,\ \dfrac{4}{11}\right)$

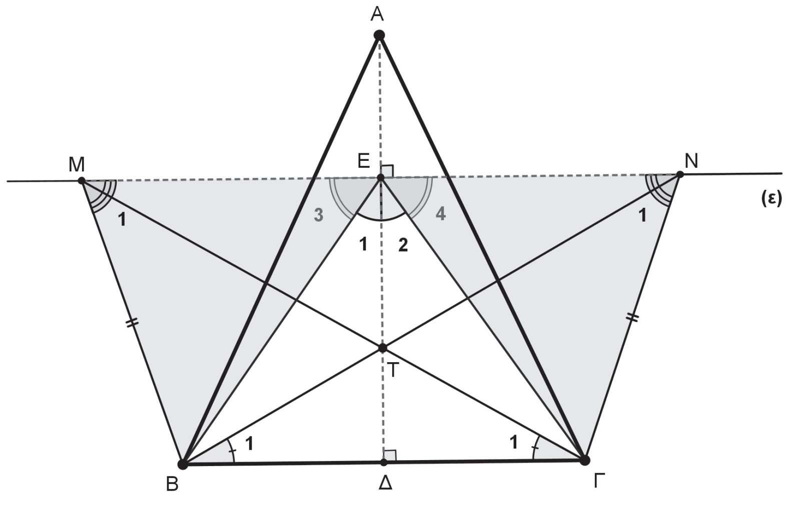
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ $(ΑΒ=ΑΓ)$ και το ύψος του $ΑΔ$. Από τυχόν σημείο Ε του ύψους $ΑΔ$ θεωρούμε ευθεία (ε) παράλληλη στη $ΒΓ$. Πάνω στην ευθεία (ε) θεωρούμε δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $Μ,Ν$ έτσι ώστε $ΕΜ=ΕΝ$ και $ΜΒ<ΜΓ$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΜΓ$ και $ΝΒ$ τέμνονται πάνω στο ύψος $ΑΔ$.

Λύση

Τα ορθογώνια τρίγωνα $ΑΔΒ$ και $ΑΔΓ$ είναι ίσα διότι έχουν τις υποτείνουσες $(ΑΒ=ΑΓ)$ και δύο οξείες γωνίες $(\hat{Β}=\hat{Γ})$ ίσες. Άρα $ΔΒ=ΔΓ$, δηλαδή το $Δ$ είναι μέσο της $ΒΓ$.

Τα τρίγωνα τώρα $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$ είναι ορθογώνια και έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες ($ΕΔ$ κοινή και από τη προηγούμενη ισότητα $ΔΒ=ΔΓ$). Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα, οπότε θα έχουν $\hat{Ε}_1=\hat{Ε}_2$ και ΕΒ = ΕΓ.

Από την τελευταία ισότητα γωνιών, προκύπτει $\hat{Ε}_3=\hat{Ε}_4$ γιατί οι γωνίες $\hat{Ε}_3,\hat{Ε}_4$ είναι συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{Ε}_1,\hat{Ε}_2$.



Σχήμα 4

Τα τρίγωνα $ΕΜΒ$ και $ΕΝΓ$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $ΕΜ=ΕΝ$ (από τα δεδομένα της άσκησης).

2. $ΕΒ=ΕΓ$ (από την ισότητα των ορθογωνίων τριγώνων $ΕΔΒ$ και $ΕΔΓ$).

3. $\hat{E}_3 = \hat{E}_4$ (συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\hat{E}_1, \hat{E}_2$).

Άρα θα έχουν $MB = N\Gamma$ και $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$.

Τα τρίγωνα MNB και $MN\Gamma$ είναι ίσα διότι έχουν:

1. $MN = MN$ (η πλευρά MN είναι κοινή).
2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).
3. $E\hat{M}B = E\hat{N}\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$).

Άρα θα έχουν και $M\Gamma = NB$.

Τα τρίγωνα τέλος $MB\Gamma$ και $NB\Gamma$ είναι ίσα γιατί έχουν:

1. $B\Gamma = B\Gamma$ (η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή)
2. $MB = N\Gamma$ (από την ισότητα των τριγώνων EMB και $EN\Gamma$)
3. $M\hat{B}\Gamma = M\hat{B}E + E\hat{B}\Gamma = N\hat{\Gamma}E + E\hat{\Gamma}B = N\hat{\Gamma}B$

Άρα θα έχουν και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$.

Αν τώρα συμβολίσουμε με T το σημείο τομής των $M\Gamma$ και NB, σε συνδυασμό με την ισότητα $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$, συμπεραίνουμε ότι η $T\Delta$ είναι το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου $TB\Gamma$, δηλαδή η $T\Delta$ είναι κάθετη προς τη $B\Gamma$ στο σημείο Δ. Άρα το σημείο T, θα ανήκει στο ύψος $A\Delta$.