Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Αν στο $\frac{1}{8}$ ενός αριθμού x προσθέσουμε το $\frac{1}{4}$ του αριθμού αυτού προκύπτει αριθμός μικρότερος κατά 1255 του αριθμού x. Να βρεθεί ο αριθμός x.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{x}{8}+\frac{x}{4}+1255=x \Leftrightarrow x-\frac{x}{8}-\frac{x}{4}=1255 \Leftrightarrow \frac{5x}{8}=1255 \Leftrightarrow x=\frac{1255\cdot 8}{5}=2008.$$

2. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους x, y και z που είναι τέτοιοι ώστε:

$$0 \le x \le y \le z,$$
$$xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44.$$

Λύση
Η τελευταία εξίσωση γράφεται:

$$\begin{aligned} & xyz+xy+yz+zx+x+y+z=44 \\ \Leftrightarrow\ & xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1=45 \\ \Leftrightarrow\ & xy(z+1)+x(z+1)+y(z+1)+(z+1)=45 \\ \Leftrightarrow\ & (xy+x+y+1)(z+1)=45 \\ \Leftrightarrow\ & (x+1)(y+1)(z+1)=45. \qquad (1) \end{aligned}$$

Επειδή οι x, y, z είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $x \le y \le z$, έπεται ότι:

$$1 \le x+1 \le y+1 \le z+1. \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) και αφού $45=1\cdot 3\cdot 3\cdot 5$ προκύπτουν οι περιπτώσεις

$$(x+1, y+1, z+1)=(1,3,15) \text{ ή } (1,5,9) \text{ ή } (3,3,5) \text{ ή } (1,1,45)$$
$$\Leftrightarrow (x,y,z)=(0,\ 2,\ 14) \text{ ή } (0,\ 4,\ 8) \text{ ή } (2,\ 2,\ 4) \text{ ή } (0,0,44).$$

3. Να βρεθούν οι γωνίες των ισοσκελών τριγώνων που έχουν τη παρακάτω ιδιότητα:
"*υπάρχει ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει μία κορυφή με την απέναντι πλευρά ώστε να δημιουργούνται μέσα στο ισοσκελές τρίγωνο, δύο ισοσκελή τρίγωνα*".
(Να εξετάσετε όλες τις δυνατές περιπτώσεις)

Λύση
Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ).
1η περίπτωση.
Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά ΒΓ ώστε τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ να είναι ισοσκελή. Διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

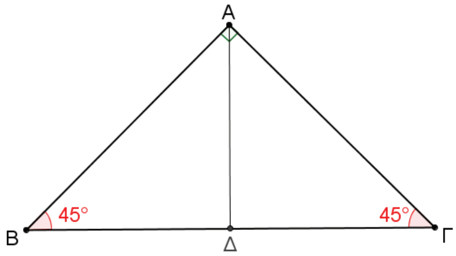
- Αν είναι $B\hat{A}\Delta=\hat{B}$ και $\Gamma\hat{A}\Delta=\Gamma\hat{\Delta}A$ τότε ισχύουν οι ισότητες των γωνιών (σχ. 3) : $\hat{A}_1=\hat{B}=\hat{\Gamma}=\hat{x}$ και $\hat{A}_2=\hat{\Delta}_1=2\hat{x}$, (ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε από τη σχέση $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=180$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$5\hat{x}=180^o \Leftrightarrow \hat{x}=36^o.$$

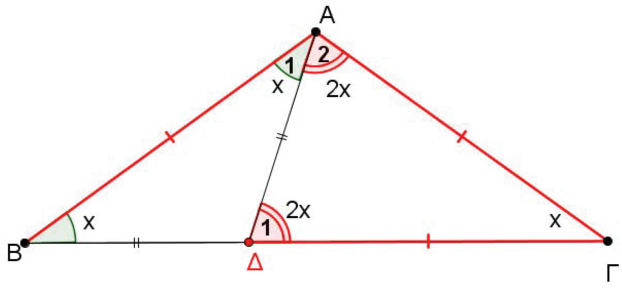
Στη περίπτωση αυτή είναι $\hat{A}=108^o$ και $\hat{B}=\hat{\Gamma}=36^o$.

- Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Delta\Gamma}$ με ίσες γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{A}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \hat{\Gamma}$, τότε προκύπτουν οι ίδιες γωνίες για το τρίγωνο ΑΒΓ.

Στην περίπτωση που είναι πάλιν ισοσκελή τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ με ίσες γωνίες $\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta = \mathrm{B}\hat{\Delta}\mathrm{A}$ και $\Gamma\hat{\mathrm{A}}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}\mathrm{A}$, τότε προκύπτουν οι γωνίες $\hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$ και $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^0$, οπότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές. Πράγματι, από τις ισότητες $\hat{\mathrm{B}} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Delta$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{\mathrm{A}}\Gamma$ έπεται ότι: $\hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = \hat{\mathrm{A}} \Rightarrow 180^\circ - \hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{A}} \Rightarrow \hat{\mathrm{A}} = 90^\circ$, οπότε θα είναι $\hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.



Σχήμα 3α



Σχήμα 3β

2η περίπτωση.

Θεωρούμε σημείο Δ στη πλευρά $\mathrm{A\Gamma}$ ώστε τα τρίγωνα $\mathrm{A\Delta B}$ και $\mathrm{A\Gamma\Delta}$ να είναι ισοσκελή και διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

- Αν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \hat{\mathrm{A}}$ και $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma = \hat{\Gamma}$, τότε (σχ. 4) ισχύουν οι ισότητες των γωνιών:

$$\hat{\mathrm{A}} = \hat{\mathrm{B}}_1 = \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{x}$$

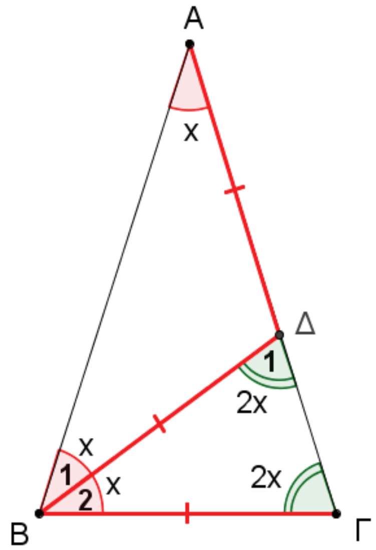
$$\text{και } \hat{\Delta}_1 = \hat{\Gamma} = 2\hat{x},$$

αφού η γωνία $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΔΑΒ, οπότε

$$\hat{x} + \hat{\mathrm{B}}_2 = \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 2x \Rightarrow \hat{\mathrm{B}}_2 = x.$$

Από τη σχέση $\hat{\mathrm{A}} + \hat{\mathrm{B}} + \hat{\Gamma} = 180^0$ καταλήγουμε στην εξίσωση:

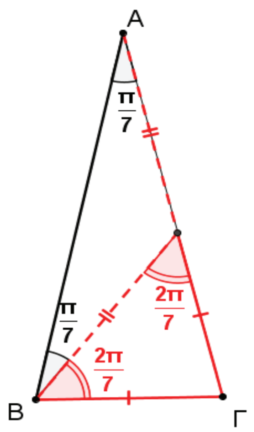
$$5\hat{x} = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{x} = 36^\circ.$$



Σχήμα 4

Στη περίπτωση αυτή είναι:

$$\hat{\mathrm{A}} = 36^\circ \text{ και } \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = 72^\circ.$$



Σχήμα 5

- Αν $\mathrm{A}\hat{\mathrm{B}}\Delta = \hat{\mathrm{A}} = x$ και $\mathrm{B}\hat{\Delta}\Gamma = \Gamma\hat{\mathrm{B}}\Delta = y$, τότε

θα έχουμε $y = 2x$ και $3x + 2y = \pi$.οπότε λαμβάνουμε τελικά τις γωνίες

$$\hat{\mathrm{A}} = \frac{\pi}{7},\ \hat{\mathrm{B}} = \hat{\Gamma} = \frac{3\pi}{7}.$$

4. Αν οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2,$$

να αποδείξετε ότι:

(α) $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

(β) Ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

Λύση

(α) Με πρόσθεση κατά μέλη των τριών δεδομένων ισοτήτων λαμβάνουμε:

$$x^2 + y^2 + z^2 - (x + y + z) = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow$$

$$x + y + z = 0, \qquad (1)$$

από την οποία προκύπτει άμεσα το ερώτημα (α), αφού τότε είναι $z = -(x + y)$ και

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 &= x^3 + y^3 + \left[-(x+y)\right]^3 \\ &= x^3 + y^3 - x^3 - y^3 - 3xy(x+y) \\ &= -3xy(-z) = 3xyz. \end{aligned}$$

(β) Από την ισότητα $x + y + z = 0$ προκύπτει ότι $z = -x - y$, οπότε η ισότητα $x^2 - y = z^2$ γίνεται

$$x^2 - y = (x+y)^2 \Leftrightarrow -y = 2xy + y^2$$

$$\Leftrightarrow y \cdot (y + 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ή } y = -2x - 1.$$

- Για $y = 0$ λαμβάνουμε $x + z = 0 \Leftrightarrow z = -x$, οπότε η δεύτερη και η τρίτη των δεδομένων σχέσεων γίνονται:

$$x = x^2 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 1,$$

οπότε έχουμε τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0,0,0) \text{ ή } (1,0,-1).$$

- Για $y = -2x - 1$ από την (1) λαμβάνουμε

$$z = -x - y = x + 1,$$

οπότε με αντικατάσταση των y, z στις αρχικές σχέσεις προκύπτει η εξίσωση

$$x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1.$$

Έτσι λαμβάνουμε και τις τριάδες

$$(x, y, z) = (0,-1,1) \text{ ή } (-1,1,0).$$

Από την εύρεση όλων των δυνατών τριάδων προέκυψε ότι σε κάθε περίπτωση ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.

2^{ος} τρόπος για το (β)

Οι δεδομένες ισότητες $x^2 - y = z^2,\ y^2 - z = x^2,\ z^2 - x = y^2$ με πολλαπλασιασμό επί y^2, z^2 και x^2, αντίστοιχα, γίνονται

$$(x^2 - z^2)y^2 = y^3,\ (y^2 - x^2)z^2 = z^3, (z^2 - y^2)x^2 = x^3,$$

από τις οποίες με πρόσθεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$x^3 + y^3 + z^3 = 0.$$

Λόγω του (α) λαμβάνουμε $xyz = 0$, δηλαδή ένας τουλάχιστον από τους x, y, z ισούται με 0.