

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{\left[1 - (-1)^{2005}\right]^0}, \quad B = \frac{\left[(-2)^2 + (-1)^2\right]^2}{5} + \frac{x}{2}$$

Αν είναι $A = B$, να προσδιορίσετε την τιμή του x .

Λύση

Επειδή $1 - (-1)^{2009} = 1 - (-1) = 2 \neq 0$ έχουμε $\left[1 - (-1)^{2009}\right]^0 = 1$, οπότε:

$$A = \frac{\left(-\frac{3}{2}\right)^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{\left[1 - (-1)^{2005}\right]^0} = \frac{3^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{2^4} = \frac{3^4 \cdot 2^4 - 3^4 + x}{16} = \frac{3^4 \cdot 2^4 - 3^4}{16} + \frac{x}{16} = \frac{3^4 \cdot 2^4 (1 - 1)}{16} + \frac{x}{16} = \frac{x}{16}.$$

Επίσης έχουμε

$$B = \frac{\left[(-2)^2 + (-1)^2\right]^2}{5} + \frac{x}{2} = \frac{(4+1)^2}{5} + \frac{x}{2} = \frac{25}{5} + \frac{x}{2} = 5 + \frac{x}{2}.$$

Επομένως έχουμε

$$A = B \Leftrightarrow \frac{x}{16} = 5 + \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2x = 80 + 8x \Leftrightarrow -6x = 80 \Leftrightarrow x = -\frac{40}{3}.$$

2. Το σημείο $A(-\lambda + 2, 4\lambda - 1)$, όπου λ θετικός ακέραιος, βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ενός συστήματος ορθογωνίων αξόνων Oxy . Να βρεθούν:

(α) ο θετικός ακέραιος λ ,

(β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος OA ,

(γ) το εμβαδόν του τετραπλεύρου $OBA\Gamma$, όπου B, Γ είναι τα ίχνη των καθέτων από το σημείο A προς τους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy , αντίστοιχα.

Λύση

(α) Σύμφωνα με τις υποθέσεις πρέπει να συναληθεύουν οι ανισότητες:

$$-\lambda + 2 > 0 \text{ και } 4\lambda - 1 > 0 \Leftrightarrow \lambda < 2 \text{ και } \lambda > \frac{1}{4},$$

από τις οποίες, αφού ο λ είναι θετικός ακέραιος, έπεται ότι $\lambda = 1$.

(β) Για $\lambda = 1$ είναι $A(1, 3)$, οπότε

$$OA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}.$$

(γ)

$$E(OAB\Gamma) = 1 \cdot 3 = 3$$

3. Στο παρακάτω σχήμα δίνονται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρές $AB = \alpha$, $A\Delta = 2\alpha$ και τέσσερα ημικύκλια εξωτερικά του ορθογωνίου. Ο εξωτερικός κύκλος έχει κέντρο το σημείο τομής O των διαγωνίων του ορθογωνίου. Να υπολογιστεί συναρτήσει του α το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

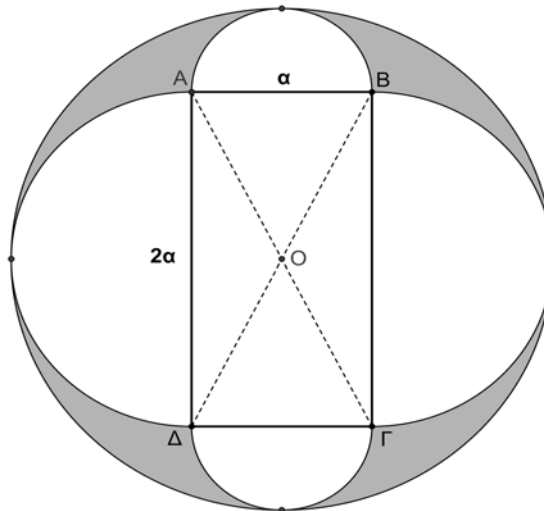
Λύση

Από το σχήμα διαπιστώνουμε ότι:

Ο μεγάλος κύκλος έχει ακτίνα $\frac{3\alpha}{2}$, τα μικρά ημικύκλια έχουν ακτίνα $\frac{\alpha}{2}$ και τα μεγάλα ημικύκλια έχουν ακτίνα α .

Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου προκύπτει από το εμβαδόν του μεγάλου κύκλου $\pi\left(\frac{3\alpha}{2}\right)^2 = \frac{9\pi\alpha^2}{4}$, αν αφαιρέσουμε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που είναι $2\alpha^2$,

τα εμβαδά των δύο μικρών ημικυκλίων $2 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{4}$ και τα εμβαδά των δύο μεγάλων ημικυκλίων



Σχήμα 2

$2 \cdot \frac{1}{2}\pi\alpha^2 = \pi\alpha^2$. Άρα το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E = \frac{9\pi\alpha^2}{4} - \frac{\pi\alpha^2}{4} - \pi\alpha^2 - 2\alpha^2 = \frac{4\pi\alpha^2 - 8\alpha^2}{4} = (\pi - 2)\alpha^2.$$

4. Αν ισχύει $\frac{45^v \cdot 2^{2v}}{6^v} = 900$, όπου v θετικός ακέραιος, να βρεθεί η τιμή της παράστασης

$$A = 2003 \cdot (-1)^v - (-1)^{v+1} + 4 \cdot (-1)^{v+2}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{45^v \cdot 2^{2v}}{6^v} = 900 \Leftrightarrow \frac{45^v \cdot 4^v}{6^v} \Leftrightarrow \left(\frac{45 \cdot 4}{6}\right)^v = 900 \Leftrightarrow 30^v = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2.$$

$$\Leftrightarrow 30^v = (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 \Leftrightarrow 30^v = 30^2 \Leftrightarrow 30^{v-2} = 1,$$

από την οποία προκύπτει ότι $v - 2 = 0 \Leftrightarrow v = 2$, αφού για κάθε άλλη τιμή του $v - 2$ η τιμή της δύναμης 30^{v-2} δεν μπορεί να είναι 1.

Άρα έχουμε:

$$A = 2003 \cdot (-1)^2 - (-1)^{2+1} + 4(-1)^{2+2} = 2003 \cdot 1 - (-1) + 4 \cdot 1 = 2003 + 1 + 4 = 2008..$$