Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Σύμφωνα με τη συζήτηση που είχε ο Γιάννης με τη Μαρία, αν x, y είναι οι αριθμοί, τότε θα ισχύουν:

$$\begin{Bmatrix} xy=(x-50)(y+40) \\ xy=(x+100)(y-20) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 40x-50y=2000 \\ -20x+100y=2000 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=100 \\ y=20 \end{Bmatrix}.$$

2. Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των παρανομαστών είναι

$$(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)\neq 0,$$

οπότε έχουμε

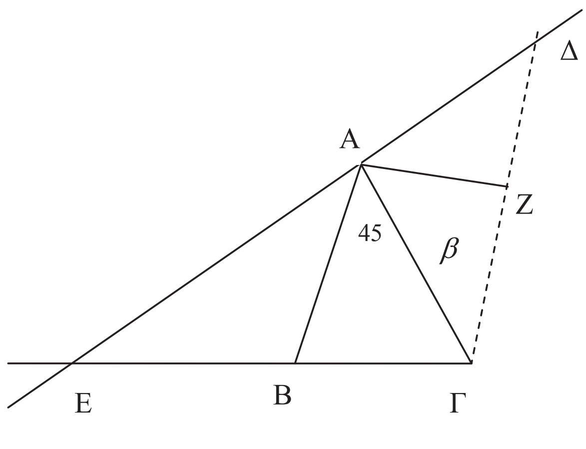
$$\mathrm{A}=\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\gamma-\alpha)(\beta^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}+\frac{(\alpha-\beta)(\gamma^2-1)}{-(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+(\gamma-\alpha)\beta^2+(\alpha-\beta)\gamma^2+(\beta-\gamma+\gamma-\alpha+\alpha-\beta)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)\alpha^2+\beta\gamma(\beta-\gamma)-\alpha(\beta^2-\gamma^2)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=$$

$$=-\frac{(\beta-\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma-\alpha(\beta+\gamma))}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}==-\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\gamma-\alpha)}=1.$$

3.



(α) Το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, οπότε $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ$. Άρα είναι $\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta=45^\circ=\mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$, οπότε $\mathrm{AB}\parallel\Gamma\Delta$, αφού τεμνόμενες από την ΑΓ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο με βάσεις ΑΒ = β, $\Gamma\Delta=\sqrt{\beta^2+\beta^2}=\beta\sqrt{2}$ και ύψος $\mathrm{AZ}=\frac{\Gamma\Delta}{2}=\frac{\beta\sqrt{2}}{2}$. Άρα έχει εμβαδόν

$$(\mathrm{AB}\Gamma\Delta)=\frac{\beta+\beta\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\beta\sqrt{2}}{2}=\frac{\beta^2\left(2+\sqrt{2}\right)}{4}.$$

(β) Επειδή είναι $AB \parallel \Gamma\Delta$ τα τρίγωνα ΕΑΒ και ΕΔΓ είναι όμοια, οπότε, αν $EA = x$, θα έχουμε:

$$\frac{x}{AB} = \frac{E\Delta}{\Delta\Gamma} \Leftrightarrow \frac{x}{\beta} = \frac{x+\beta}{\beta\sqrt{2}} \Leftrightarrow x\sqrt{2} = x+\beta \Leftrightarrow x\left(\sqrt{2}-1\right) = \beta \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{\beta}{\sqrt{2}-1} = \beta\left(\sqrt{2}+1\right).$$

4. Η δεδομένη σχέση γράφεται διαδοχικά:

$$\underbrace{x^6 + 2x^3y^2 + y^4} + 3x^3 + 3y^2 = 40$$

$$\left(x^3 + y^2\right)^2 + 3\left(x^3 + y^2\right) + 2 = 42$$

$$\left(x^3 + y^2 + 1\right)\cdot\left(x^3 + y^2 + 2\right) = 42.$$

Οι αριθμοί όμως $x^3 + y^2 + 1$ και $x^3 + y^2 + 2$, είναι θετικοί ακέραιοι με $x^3 + y^2 + 1 < x^3 + y^2 + 2$ και γινόμενο

$$42 = 1\cdot 41 = 2\cdot 21 = 3\cdot 14 = 6\cdot 7.$$

Επομένως θα πρέπει:

$$x^3 + y^2 + 1 = 1 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 42 \quad (1)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 2 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 21 \quad (2)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 3 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 14 \quad (3)$$

$$x^3 + y^2 + 1 = 6 \text{ και } x^3 + y^2 + 2 = 7 \quad (4)$$

Προφανώς οι σχέσεις $(1),(2),(3)$ είναι αδύνατες και από τη σχέση (4), έχουμε:

$$x^3 + y^2 = 5 \text{ που αληθεύει για } x = 1 \text{ και } y = 2.$$

Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε το τριώνυμο

$$\omega^2 + 3\omega - 40 = 0, \text{ όπου } \omega = x^3 + y^2,$$

η οποία, αφού $x, y > 0$ έχει τη μοναδική λύση $x^3 + y^2 = 5$, που αληθεύει μόνο για $x = 1$ και $y = 2$.