4. Αν υπήρχαν τέτοιοι αριθμοί τότε

$$\left(\frac{3}{2}a\beta^{-1}+\frac{10}{3}a^{-1}\beta\right)^2=9$$, οπότε

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2+10=9$$ οπότε

$$\frac{9}{4}a^2\beta^{-2}+\frac{100}{9}a^{-2}\beta^2=9-10=-1, \quad \textit{που δεν ισχύει.}$$

ΛΥΣΕΙΣ Α΄ τάξη Λυκείου

1. Έστω ότι α,β,γ,δ,ε είναι οι αριθμοί των μαθητών των πέντε αυτών τμημάτων. Έτσι έχουμε:

$$10(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)=1090\Rightarrow$$
$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=109 \quad (1)$$

Έστω ότι οι αριθμοί των μαθητών των τμημάτων αυτών είναι ανά δύο διαφορετικοί και έστω ότι:

$\alpha<\beta<\gamma<\delta<\varepsilon$. Επειδή $\alpha\geq 20$ και α,β,γ,δ,ε φυσικοί έχουμε:

$$\beta>\alpha\geq 20\Rightarrow\beta>20\Rightarrow\beta\geq 21$$
$$\gamma>\beta\geq 21\Rightarrow\gamma>21\Rightarrow\gamma\geq 22$$
$$\delta>\gamma\geq 22\Rightarrow\delta>22\Rightarrow\delta\geq 23$$
$$\varepsilon>\delta\geq 23\Rightarrow\varepsilon>23\Rightarrow\varepsilon\geq 24$$

Συνεπώς $\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon \geq 110$, άτοπο λόγω της (1). Άρα, δύο τουλάχιστον από τα τμήματα αυτά έχουν τον ίδιο αριθμό μαθητών.

2. Η εξίσωση γράφεται:

$$\lambda^2 x+3\lambda=\lambda^3+2\lambda x-2 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^2 x-2\lambda x=\lambda^3-3\lambda-2 \Leftrightarrow$$

$$x\left(\lambda^2-2\lambda\right)=\lambda^3-3\lambda-2$$

$$\lambda^2-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda\left(\lambda-2\right)=0 \Leftrightarrow \lambda=0 \ \text{ή} \ \lambda=2$$

1. Αν λ=0 είναι αδύνατη
2. Αν λ=2 είναι αόριστη
3. Αν λ≠0 και λ≠2 τότε

$$x=\frac{\lambda^3-3\lambda-2}{\lambda^2-2\lambda}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda-2\right)\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda\left(\lambda-2\right)} \Leftrightarrow x=\frac{\left(\lambda+1\right)^2}{\lambda}$$

3. Η ανίσωση γράφεται:

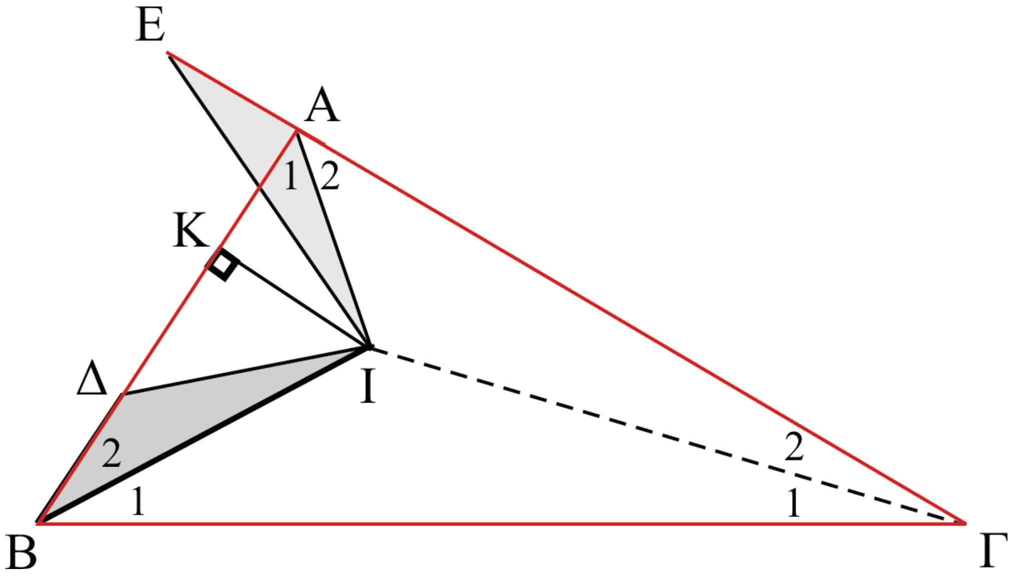
$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+2\frac{\alpha}{\gamma}+2\frac{\gamma}{\beta}+2\frac{\beta}{\alpha} \geq 3\frac{\alpha}{\gamma}+3\frac{\gamma}{\beta}+3\frac{\beta}{\alpha},$$ αρκεί

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2-\frac{\alpha}{\gamma}-\frac{\gamma}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha} \geq 0,$$ αρκεί

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\gamma}\right)^2+\left(\frac{\beta}{\gamma}-\frac{\gamma}{\alpha}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right]\geq 0,$$

η οποία ισχύει.

4.



Αν ΓΕ=α τότε ΑΕ=α-β=ΒΔ και ΓΙ η τρίτη διχοτόμος.

Έχουμε $\overset{\Delta}{\mathrm{I\Gamma E}}=\overset{\Delta}{\mathrm{I\Gamma B}}$ διότι ΙΓ=ΙΓ, ΓΕ=ΓΒ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ άρα $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{B}}_1$, ΙΕ=ΙΒ.

Άρα $\overset{\Delta}{\mathrm{IAE}}=\overset{\Delta}{\mathrm{IB\Delta}}$ διότι ΒΔ=ΑΕ, ΙΕ=ΙΒ και $\hat{\mathrm{E}}=\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{B}}_2$,
άρα ΙΑ=ΙΔ.

Β΄ τρόπος

Αρκεί το Ι να ανήκει στη μεσοκάθετο του ΑΔ. Αν δηλαδή ΙΚ⊥ΑΔ, αρκεί ΚΑ=ΚΔ. Πράγματι ΚΑ=τ–α
και ΚΔ=|ΒΚ–ΒΔ|=|τ–β– (α–β)|=|τ–α|=τ–α, αφού τ>α.