

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β είναι τέτοιοι ώστε: $\alpha^3 + \beta^3 = 2\alpha\beta(\alpha + \beta)$,

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2}$.

Λύση

Έχουμε ότι:

$$\alpha^3 + \beta^3 = 2\alpha\beta(\alpha + \beta) \Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 2\alpha\beta(\alpha + \beta)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)(\alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2) = 0 \stackrel{\alpha+\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2 = 0$$

$$\stackrel{\beta>0}{\Leftrightarrow} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Επειδή το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 = 0$ ισούται με 1, έπεται ότι

οι αριθμοί $\rho_1 = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ και $\rho_2 = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ (ή με αντίστροφη σειρά) είναι οι δύο

ρίζες της εξίσωσης $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - 3\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) + 1 = 0$ με άθροισμα $\rho_1 + \rho_2 = 3$. Επομένως, έχουμε:

$$K = \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha}\right)^2 - 2 = 3^2 - 2 = 7$$

Πρόβλημα 2

Οι θετικοί ακέραιοι n, m είναι τέτοιοι, ώστε οι αριθμοί $\frac{50}{3n-2}$ και $\frac{243}{4m-1}$ να είναι θετικοί ακέραιοι.

(α) Να βρεθεί η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση

$$A = 2(n+1) - 3(m+2) + 7.$$

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει η παράσταση:

$$B = \frac{162}{n^2} - \frac{m^2}{3721}.$$

Λύση

Οι θετικοί διαιρέτες του 50 είναι οι αριθμοί 1, 2, 5, 10, 25, 50, οπότε ο $3n - 2$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $3n$ είναι κάποιος από τους 3, 4, 7, 12, 27, 52 οπότε οι πιθανές τιμές του n , αφού είναι θετικός ακέραιος, είναι 1, 4, 9.

Οι θετικοί διαιρέτες του $243 = 3^5$ είναι οι αριθμοί 1, 3, 9, 27, 81, 243 οπότε ο $4m - 1$ είναι κάποιος από αυτούς, οπότε ο $4m$ είναι κάποιος από τους 2, 4, 10, 28, 82, 244, οπότε οι πιθανές τιμές του m είναι 1, 7, 61.

(α) Η παράσταση $A = 2(n+1) - 3(m+2) + 7 = 2n - 3m + 3$ παίρνει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει τη μικρότερη δυνατή τιμή του. Τότε είναι: $\max A = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 1 + 3 = 18$.

(β) Έχουμε ότι $B = \frac{162}{n^2} - \frac{m^2}{3721}$, οπότε η παράσταση B παίρνει τη μικρότερη δυνατή τιμή της όταν ο ακέραιος n πάρει τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του και ο ακέραιος m πάρει επίσης τη μεγαλύτερη δυνατή τιμή του. Τότε έχουμε:

$$\min B = \frac{162}{9^2} - \frac{61^2}{3721} = \frac{162}{81} - \frac{3721}{3721} = 2 - 1 = 1.$$

Πρόβλημα 3

Να προσδιορίσετε τους μη μηδενικούς πραγματικούς αριθμούς x, y, z που ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$\frac{y+3x}{xy} = \frac{3z+5y}{yz} = \frac{5x+z}{zx} = \frac{140}{x^2+y^2+z^2}.$$

Λύση

Οι δύο πρώτες εξισώσεις μπορούν να γραφούν:

$$\frac{1}{x} + \frac{3}{y} = \frac{3}{y} + \frac{5}{z} = \frac{5}{z} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{5}{z}, \frac{1}{x} = \frac{3}{y} \Leftrightarrow y = 3x, z = 5x.$$

Τότε έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{3z+5y}{yz} = \frac{140}{x^2+y^2+z^2} &\Leftrightarrow \frac{15x+15x}{15x^2} = \frac{140}{x^2+9x^2+25x^2} \Leftrightarrow \frac{30x}{15x^2} = \frac{140}{35x^2} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{140}{35x^2} \Leftrightarrow \frac{2}{x} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 4x \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \stackrel{x \neq 0}{\Leftrightarrow} x = 2. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε: $x = 2, y = 6, z = 10$.

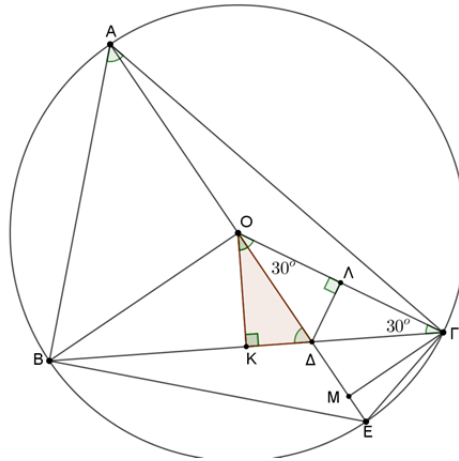
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 60^\circ$. Η διάμετρος AE του περιγεγραμμένου κύκλου $C(O, R)$ του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ , έτσι ώστε $B\Delta = 2 \cdot \Delta\Gamma$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\hat{\Delta O\Gamma} = 30^\circ$

(β) Να εκφράσετε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABE\Gamma$ συναρτήσει της πλευράς $B\Gamma = \alpha$.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Φέρουμε την $OK \perp B\Gamma$, οπότε το K είναι το μέσο της πλευράς BΓ και $K\Gamma = \frac{B\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{2}$.

$$\text{Επειδή } \frac{B\Delta}{2} = \frac{\Delta\Gamma}{1} = \frac{B\Delta + \Delta\Gamma}{2+1} = \frac{B\Gamma}{3} = \frac{\alpha}{3} \Rightarrow \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{3} \text{ και } K\Delta = K\Gamma - \Delta\Gamma = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{6}.$$

Επίσης $\hat{O}\hat{\Gamma}\Delta = \hat{O}\hat{\Gamma}K = 90^\circ - \hat{K}\hat{O}\hat{\Gamma} = 90^\circ - \hat{A} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$, οπότε, αν φέρουμε $\Delta\Lambda \perp O\Gamma$, από το ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\Delta\Lambda$ με $\hat{\Delta}\hat{\Gamma}\Lambda = 30^\circ$ προκύπτει ότι η απέναντι κάθετη πλευρά ισούται με το μισό της υποτείνουσας, δηλαδή: $\Delta\Lambda = \frac{\Delta\Gamma}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το ημίτονο τη γωνίας των 30° στο ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma\Delta\Lambda$, οπότε έχουμε: $\Delta\Lambda = \Delta\Gamma \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{\alpha}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{6}$.

Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα $OK\Delta$ και $OL\Delta$ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία (OL κοινή υποτείνουσα και $K\Delta = \Delta\Lambda$), οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν $\hat{K}\hat{O}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{O}\hat{\Lambda}$ και αφού $\hat{K}\hat{O}\hat{\Delta} + \hat{\Delta}\hat{O}\hat{\Lambda} = \hat{K}\hat{O}\hat{\Gamma} = 60^\circ$, έπεται ότι $\hat{K}\hat{O}\hat{\Delta} = \hat{\Delta}\hat{O}\hat{\Lambda} = 30^\circ \Rightarrow \hat{\Delta}\hat{O}\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

(β) Επειδή το τρίγωνο $AO\Gamma$ είναι ισοσκελές με $OA = O\Gamma = R$, και την εξωτερική του γωνία $\hat{\Delta}\hat{O}\hat{\Gamma} = 30^\circ$, έπεται ότι $\hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{O}\hat{A}\hat{\Gamma} = \frac{\hat{\Delta}\hat{O}\hat{\Gamma}}{2} = \frac{30^\circ}{2} = 15^\circ$. Επομένως θα είναι

$$\hat{B}\hat{A}\hat{E} = \hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} - \hat{E}\hat{A}\hat{\Gamma} = 60^\circ - 15^\circ = 45^\circ.$$

Τότε το τρίγωνο ABE είναι ορθογώνιο ισοσκελές με ύψος την ακτίνα BO . Από το τρίγωνο $OK\Gamma$ προκύπτει η σχέση της ακτίνας R με την πλευρά α , αφού είναι $OK = \frac{R}{2}$ και

$$O\Gamma^2 - OK^2 = K\Gamma^2 \Rightarrow R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{3R^2}{4} = \frac{\alpha^2}{4} \Rightarrow \alpha = R\sqrt{3}.$$

Το ύψος GM του τριγώνου AGE παρατηρούμε προκύπτει από το ορθογώνιο τρίγωνο OGM με $\hat{M}\hat{O}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ ότι είναι $GM = \frac{O\Gamma}{2} = \frac{R}{2}$.

Για το εμβαδόν του τετραπλεύρου $ABE\Gamma$ έχουμε:

$$E_{(ABEF)} = E_{(ABE)} + E_{(AEF)} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BO + \frac{1}{2} \cdot AE \cdot \Gamma M = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R + \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot \frac{R}{2} = \frac{3R^2}{2} = \frac{\alpha^2}{2}.$$

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση: $\|x+8|-3x| = \frac{x+7}{6}$.

Λύση

Λόγω της ύπαρξης των απόλυτων τιμών θα εργαστούμε σε κατάλληλα διαστήματα που θα μας επιτρέπουν να αποφύγουμε τις απόλυτες τιμές. Παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω της απόλυτης τιμής στο πρώτο μέλος, πρέπει: $\frac{x+7}{6} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -7$.

Τότε η εξίσωση γίνεται:

$$|x+8-3x| = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow |8-2x| = \frac{x+7}{6} \quad (1).$$

Επειδή το πρόσημο του όρου $8-2x$ αλλάζει εκατέρωθεν του 4, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) $-7 \leq x < 4$. Τότε

$$(1) \Leftrightarrow 8-2x = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow 48-12x = x+7 \Leftrightarrow 13x = 41 \Leftrightarrow x = \frac{41}{13} < 4,$$

η οποία είναι δεκτή γιατί ανήκει στο διάστημα $[-7, 4)$.

(β) $x \geq 4$. Τότε

$$(1) \Leftrightarrow 2x-8 = \frac{x+7}{6} \Leftrightarrow 12x-48 = x+7 \Leftrightarrow 11x = 55 \Leftrightarrow x = 5 > 4, \text{ δεκτή.}$$

Πρόβλημα 2

Αν οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί x, y, z ικανοποιούν τις ισότητες

$$x+2y = y+3z = z+5x,$$

να βρείτε:

(α) Την τιμή των λόγων $\frac{x}{y}$ και $\frac{z}{y}$.

(β) Τις τιμές των x, y, z για τις οποίες η παράσταση $x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 144$ παίρνει την ελάχιστη τιμή της.

Λύση

Αν θέσουμε $x+2y = y+3z = z+5x = t$, τότε έχουμε:

$$\begin{cases} x+2y=t \\ y+3z=t \\ z+5x=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y=t \\ -2y-6z=-2t \\ 6z+30x=6t \end{cases} \Rightarrow 31x=5t \Rightarrow x=\frac{5t}{31}.$$

Τότε λαμβάνουμε:

$$x+2y=t \Rightarrow \frac{5t}{31}+2y=t \Rightarrow 2y=\frac{26t}{31} \Rightarrow y=\frac{13t}{31},$$

$$z+5x=t \Rightarrow z+\frac{25t}{31}=t \Rightarrow z=\frac{6t}{31}.$$