Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Αν x, y είναι πραγματικοί αριθμοί και οι αριθμοί $a_1 = x+y$, $a_2 = x^2+y^2$ και $a_4 = x^4+y^4$ είναι ακέραιοι, να αποδείξετε ότι και ο αριθμός $a_3 = x^3+y^3$ είναι ακέραιος.

Λύση

Επειδή $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)\in\mathbb{Z}$, αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $xy\in\mathbb{Z}$.
Σύμφωνα με τις υποθέσεις έχουμε

$$a_1^2-a_2=(x+y)^2-(x^2+y^2)=2xy\in\mathbb{Z} \qquad (1)$$

$$a_2^2-a_4=(x^2+y^2)^2-(x^4+y^4)=2x^2y^2\in\mathbb{Z}, \qquad (2)$$

αφού $a_1, a_2, a_4\in\mathbb{Z}$. Από την (1) έπεται ότι:

$$xy=\frac{a_1^2-a_2}{2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι $xy\in\mathbb{Z}$. Πράγματι, αν $xy=\dfrac{a_1^2-a_2}{2}\notin\mathbb{Z}$, τότε θα είχαμε $a_1^2-a_2=m$ περιττός ακέραιος, οπότε από τη σχέση (2) θα είχαμε ότι

$$2x^2y^2=2\cdot\frac{(a_1^2-a_2)^2}{4}=\frac{(a_1^2-a_2)^2}{2}=\frac{m^2}{2}\notin\mathbb{Z},$$

αφού m περιττός. Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί αντίκειται στη σχέση (2). Επομένως αληθεύει ότι $xy\in\mathbb{Z}$.
Άρα έχουμε:

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)\in\mathbb{Z},$$

αφού $x+y,\ xy\in\mathbb{Z}$. Διαφορετικά, θα μπορούσαμε να γράψουμε

$$x^3+y^3=(x^2+y^2)(x+y)-xy(x+y)\in\mathbb{Z},\ \text{αφού}\ x^2+y^2,\ x+y,\ xy\in\mathbb{Z}.$$

Πρόβλημα 2

Έστω $\mathrm{A}=\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)$ το γινόμενο τεσσάρων διαδοχικών θετικών ακέραιων.
(α) Να αποδείξετε ότι ο Α ισούται με το γινόμενο δύο διαδοχικών άρτιων ακέραιων.
(β) Είναι δυνατόν να είναι ο Α ίσος με το τετράγωνο ενός ακέραιου;

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{A}&=\kappa(\kappa+1)(\kappa+2)(\kappa+3)=\kappa(\kappa+3)(\kappa+1)(\kappa+2)\\&=\kappa(\kappa+3)(\kappa^2+3\kappa+2)=\kappa(\kappa+3)(\kappa(\kappa+3)+2)\end{aligned}$$

Επομένως ο Α ισούται με το γινόμενο των ακεραίων $\kappa(\kappa+3)$, $\kappa(\kappa+3)+2$ οι οποίοι διαφέρουν κατά 2 και επιπλέον είναι άρτιοι, αφού στο γινόμενο $\kappa(\kappa+3)$ ο ένας από τους δύο παράγοντες είναι άρτιος και ο άλλος περιττός.
(β) Έστω $\kappa(\kappa+3)=2\mu$, όπου μ θετικός ακέραιος. Τότε $\mathrm{A}=2\mu(2\mu+2)=4\mu(\mu+1)$

Αν ήταν ο Α τέλειο τετράγωνο ακεραίου, τότε θα είχαμε $\mathrm{A}=4\mu(\mu+1)=(2\lambda)^2=4\lambda^2$, όπου

λ ακέραιος. Θα είχαμε τότε $\mu(\mu+1)=\lambda^2$, όπου μ θετικός ακέραιος και λ ακέραιος, το οποίο είναι άτοπο, γιατί

$$\mu^2<\mu^2+\mu=\mu(\mu+1)<(\mu+1)^2,$$

δηλαδή ο $\mu(\mu+1)$ βρίσκεται μεταξύ δύο τετραγώνων διαδοχικών θετικών ακέραιων.

Πρόβλημα 3

Ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ έχει άθροισμα των δύο μη παράλληλων πλευρών του ίσο με $4\sqrt{10}$ μέτρα, ύψος ίσο με 6 μέτρα και το εμβαδόν του ισούται με 72 τετραγωνικά μέτρα. Αν το τραπέζιο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R, να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας R .

Λύση

Ονομάζουμε Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου και θέτουμε $\mathrm{AB}=\alpha$, $\Gamma\Delta=\beta$ και φέρουμε το ύψος $\mathrm{AE}=6$. Επειδή το τραπέζιο είναι ισοσκελές, θα ισχύει ότι ΒΓ=ΑΔ. Όμως $\mathrm{B\Gamma}+\mathrm{A\Delta}=4\sqrt{10}$, οπότε $\mathrm{B\Gamma}=\mathrm{A\Delta}=2\sqrt{10}$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΕ παίρνουμε

$$\mathrm{AE}^2+\mathrm{E\Delta}^2=\left(2\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta}^2=40-36 \Leftrightarrow \mathrm{E\Delta}=2 \qquad (1)$$

Επιπλέον από τον τύπο για το εμβαδό του τραπεζίου έχουμε:

$$\mathrm{E}=\frac{(\alpha+\beta)\cdot \mathrm{A\Delta}}{2} \Rightarrow 72=\frac{(\alpha+\beta)\cdot 6}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=24 \qquad (2)$$

Αν τώρα φέρουμε την κάθετη από το Ο στις βάσεις που τις τέμνει στα μέσα τους Ν και Μ, τότε

$$\mathrm{E\Delta}=\mathrm{M\Delta}-\mathrm{ME}=\frac{\beta}{2}-\frac{\alpha}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow} \beta-\alpha=4 \qquad (3)$$

Από τις (2) και (3) παίρνουμε $\alpha=10,\ \beta=14$.

Αν τέλος ονομάσουμε $\mathrm{OM}=x$, $\mathrm{ON}=y$, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Αν το Ο είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow x^2+49=R^2 \qquad (4)$$

και

$$y^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow y^2+25=R^2 \Rightarrow (6-x)^2+25=R^2 \Rightarrow$$

$$x^2-12x+36+25=R^2 \Rightarrow 61-12x=R^2-x^2 \overset{(4)}{=} 49$$

οπότε $12x=12 \Rightarrow x=1$, οπότε από την (4) έχουμε ότι $R=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

(β) Αν το Ο δεν είναι μεταξύ των Μ, Ν τότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα τρίγωνα ΟΜΓ, ΟΝΒ, έχουμε

$$x^2+\left(\frac{\beta}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow x^2+49=R^2 \qquad (4)$$

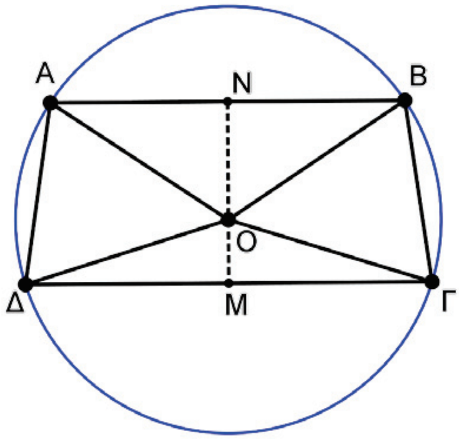
και

$$y^2+\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=R^2 \Rightarrow y^2+25=R^2 \Rightarrow (6+x)^2+25=R^2 \Rightarrow$$

$$x^2+12x+36+25=R^2 \Rightarrow 61+12x=R^2-x^2 \overset{(4)}{=} 49$$

οπότε $12x+12=0$, άτοπο.

Επομένως υπάρχει μόνο μία δυνατή περίπτωση στην οποία $R=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$



Σχήμα 3

Πρόβλημα 4

Πόσοι εξαψήφιοι θετικοί ακέραιοι πολλαπλασιαζόμενοι με το 2007 δίνουν αποτέλεσμα που να λήγει σε 2008;

Λύση

Θα βρούμε πρώτα έναν τετραψήφιο x τέτοιον, ώστε ο $2007x$ να λήγει σε 2008. Γράφουμε $2007x=2000x+7x$ οπότε αφού ο $2000x$ λήγει σε 000, αναζητούμε x ώστε ο $7x$ να λήγει σε 008.

Για να λήγει ο $7x$ σε 008, πρέπει ο x να λήγει σε 4. Τότε έχουμε δύο κρατούμενα, οπότε το προτελευταίο ψηφίο του x πρέπει να είναι 4. Έχουμε τρία κρατούμενα, οπότε το τρίτο από το τέλος ψηφίο του x πρέπει να είναι 1. Επομένως ο x λήγει σε 144.

Αναζητούμε λοιπόν τετραψήφιο $\overline{a144}$ τέτοιον, ώστε να πολλαπλασιάζεται με τον 2007 και ο αριθμός που προκύπτει να λήγει σε 2008. Ο $2000\cdot\overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος το τελευταίο ψηφίο του $2a$. Επιπλέον ο $7\cdot\overline{a144}$ έχει τέταρτο ψηφίο από το τέλος ίσο με το τελευταίο ψηφίο του $7a+1$ (γιατί έχουμε και ένα κρατούμενο). Οπότε ο $2a+(7a+1)=9a+1$, πρέπει να λήγει σε 2, οπότε πρέπει $a=9$.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο 9144. Πράγματι, το γινόμενο $2007\cdot 9144$ ισούται με 18352008 που λήγει σε 2008.