$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}$. Για να τον συμφέρει αυτό, θα πρέπει αυτός ο χρόνος να είναι μικρότερος ή ίσος από τον χρόνο που χρειαζόταν αν συνέχιζε με τα πόδια, δηλαδή η επιλογή του ήταν καλή αν

$$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}\le\frac{y}{6}\Leftrightarrow 5x+2(x+y)\le 5y\Leftrightarrow 7x\le 3y\Leftrightarrow 10x\le 3x+3y\Leftrightarrow\frac{x}{x+y}\le\frac{3}{10},$$

δηλαδή αν το ποσοστό είναι μικρότερο ή ίσο του 30%.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$x^2+4x-9=4|x|.$$

Λύση

Για $x\ge 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2-9=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9}\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-3,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η λύση: $x=3$.

Για $x<0$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2+8x-9=0, \qquad (2)$$

με διακρίνουσα $\Delta=64+36=100$. Επομένως, η εξίσωση αυτή έχει 2 διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο $\mathbb{R}$, τις

$$x=\frac{-8\pm 10}{2}\Leftrightarrow x=-9 \text{ ή } x=1,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η $x=-9$.

Επομένως, η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $x=3$ και $x=-9$.

Πρόβλημα 2

Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{abc}=100a+10b+c$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση με αγνώστους τα ψηφία του αριθμού γράφεται:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c\Leftrightarrow 100a+10b+c=(a+b+c)^2+a+b+c$$

$$\Leftrightarrow(a+b+c)^2=99a+9b\Leftrightarrow(a+b+c)^2=9(11a+b).$$

Επειδή $1\le a\le 9, 0\le b\le 9$, από την τελευταία ισότητα μπορούμε να έχουμε έναν περιορισμό για τον αριθμό $(a+b+c)^2$. Πράγματι, έχουμε

$$9\cdot(11\cdot 1+0)=99\le 9(11a+b)\le 9(11\cdot 9+9)=972$$

$$\Rightarrow 99\le(a+b+c)^2\le 972\Rightarrow 10\le a+b+c\le 31$$

Όμως είναι $a+b+c\le 27$, οπότε: $10\le a+b+c\le 27$.

Επίσης από την ισότητα $(a+b+c)^2=9(11a+b)$ προκύπτει ότι ο αριθμός $(a+b+c)^2$ είναι πολλαπλάσιο του 9, οπότε ο αριθμός $a+b+c$ θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν ήταν $a+b+c\ne 3k$, όπου k θετικός ακέραιος, τότε θα είχαμε τις περιπτώσεις $a+b+c=3k+1$ ή $a+b+c=3k+2$, $k\in\mathbb{Z}$, από τις οποίες έπεται ότι $(a+b+c)^2 = πολ.3+1$, δηλαδή $(a+b+c)^2 \neq πολ.9$, δηλαδή ο αριθμός $(a+b+c)^2$ δεν θα ήταν πολλαπλάσιο του 9, άτοπο. Επομένως οι δυνατές τιμές του αθροίσματος $a+b+c$ είναι οι: 12, 15, 18, 21, 24, 27.

- Αν $a+b+c=12$, τότε $11a+b=16 \Leftrightarrow a=1, b=5$, οπότε $c=6$ και $\overline{abc}=156$
- Αν $a+b+c=15$, τότε $11a+b=25 \Leftrightarrow a=2, b=3$, οπότε $c=10$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=18$, τότε $11a+b=36 \Leftrightarrow a=3, b=3$, οπότε $c=12$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=21$, τότε $11a+b=49 \Leftrightarrow a=4, b=5$, οπότε $c=12$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=24$, τότε $11a+b=64 \Leftrightarrow a=5, b=9$, οπότε $c=10$, άτοπο.
- Αν $a+b+c=27$, τότε $11a+b=81 \Leftrightarrow a=7, b=4$, οπότε $c=16$, άτοπο.

Επομένως ο ζητούμενος αριθμός είναι ο **156.**

Πρόβλημα 3

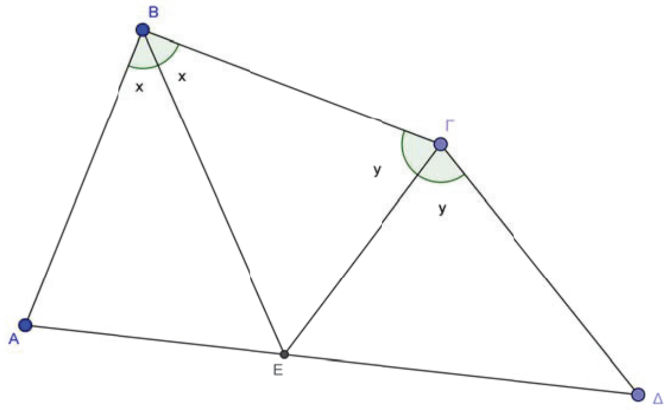
Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ ώστε $\hat{Β}+\hat{Γ}=240°$ και $ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ$. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}, \hat{Γ}$ τέμνονται πάνω στην πλευρά ΑΔ.

Λύση

Έστω οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{Β}, \hat{Γ}$ τέμνονται στο Ε. Θα αποδείξουμε ότι τα σημεία Α, Ε και Δ είναι συνευθειακά, δηλαδή το Ε βρίσκεται πάνω στην πλευρά ΑΔ. Έχουμε $Α\hat{Β}Ε = Ε\hat{Β}Γ = x$ και $Ε\hat{Γ}Β = Ε\hat{Γ}Δ = y$ με $x+y=120°$. Τα τρίγωνα ΑΒΕ, ΒΓΕ είναι ίσα, αφού έχουν $ΑΒ=ΒΓ$, ΒΕ κοινή και την περιεχόμενη γωνία ίση. Επομένως θα είναι $Β\hat{Α}Ε = y$ και από το τρίγωνο ΒΑΕ έχουμε $Α\hat{Ε}Β = 180° - x - y = 60°$. Από την ισότητα των τριγώνων έχουμε $Β\hat{Ε}Γ = Β\hat{Ε}Α = 60°$.

Όμοια τα τρίγωνα ΒΕΓ, ΓΔΕ είναι ίσα αφού έχουν $ΒΓ=ΓΔ$, ΓΕ κοινή και την περιεχόμενη γωνία ίση λόγω διχοτόμου. Άρα θα είναι: $Γ\hat{Ε}Δ = Γ\hat{Ε}Β = 60°$.

Επομένως $Α\hat{Ε}Β + Β\hat{Ε}Γ + Γ\hat{Ε}Δ = 60° + 60° + 60° = 180°$ και άρα το Ε ανήκει στην ΑΔ.



Σχήμα 3

Πρόβλημα 4

Δύο φίλοι Α και Β ανέλαβαν την εκτέλεση ενός έργου. Ο Β ξεκίνησε να εργάζεται μία ώρα μετά το ξεκίνημα του Α. Τρεις ώρες μετά το ξεκίνημα της εργασίας του Α διαπίστωσαν ότι έχουν ακόμη να εκτελέσουν τα $\frac{9}{20}$ του έργου. Όταν τελείωσε το έργο διαπίστωσαν ότι ο καθένας τους είχε εκτελέσει το μισό του έργου. Να βρείτε σε πόσες ώρες μπορεί ο καθένας από του δύο φίλους να τελειώσει το έργο, αν εργάζεται μόνος του.

Λύση.

Έστω ότι για την αποπεράτωση του έργου, ο Α, αν εργάζεται μόνος του, χρειάζεται x ώρες και ο Β, αν εργάζεται μόνος του, χρειάζεται y ώρες. Τότε σε μία ώρα ο Α θα εκτελεί το $\frac{1}{x}$ του έργου, ενώ ο Β θα εκτελεί το $\frac{1}{y}$ του έργου. Έτσι 3 ώρες μετά την έναρξη εργασίας του Α αυτός θα έχει εκτελέσει τα $\frac{3}{x}$ του έργου, ενώ ο Β θα έχει εργαστεί 2 ώρες και θα έχει εκτελέσει τα $\frac{2}{y}$ του έργου. Σύμφωνα με την υπόθεση, σε 3 ώρες το μέρος του έργου που έχει εκτελεστεί είναι $1-\frac{9}{20}=\frac{11}{20}$, οπότε θα έχουμε την εξίσωση

$$\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20} \qquad (1)$$

Επειδή στο τελείωμα του έργου ο καθένας έχει εκτελέσει το μισό μέρος του έργου, θα έχουν εργαστεί ο Α $\frac{x}{2}$ ώρες και ο Β $\frac{y}{2}$ ώρες, αντίστοιχα. Επομένως, θα έχουμε

$$\frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1 \qquad (2)$$

Άρα έχουμε το σύστημα

$$\left\{\begin{array}{c}\frac{3}{x}+\frac{2}{y}=\frac{11}{20}\\ \frac{x}{2}-\frac{y}{2}=1\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20\left(2x+3y\right)=11xy\\ x-y=2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20\left(2x+3y\right)=11xy\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}20\left(2x+3(x-2)\right)=11x(x-2)\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}100x-120=11x^2-22x\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}11x^2-122x+120=0\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x^2-\left(10+\frac{12}{11}\right)x+10\cdot\frac{12}{11}=0\\ y=x-2\end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c}x=10 \text{ ή } x=\frac{12}{11}\\ y=x-2\end{array}\right\}$$

$\Leftrightarrow (x,y)=(10,8)$, αφού η λύση $x=\frac{12}{11}$ απορρίπτεται, γιατί σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει να είναι $x>3$. Άρα, ο Α τελειώνει μόνος του το έργο σε 10 ώρες και Β το τελειώνει μόνος του σε 8 ώρες.