$$\Gamma\hat{B}\Delta \equiv \hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 45^\circ \overset{(3)}{\Rightarrow} 2\cdot\Gamma\hat{B}\Delta = 45^\circ \Rightarrow \Gamma\hat{B}\Delta = 22,5^\circ$$

Με το ίδιο σκεπτικό όπως προηγουμένως έχουμε ότι $\hat{B}_3 = \hat{Z}_1$, αφού ΔΒ = ΓΖ, $\hat{B}_4 = \hat{Z}_1$, αφού $AB \parallel \Gamma Z$. Επίσης είναι $A\hat{B}\Delta = \hat{B}_3 + \hat{B}_4 = 45^\circ$, οπότε λαμβάνουμε τελικά $\Delta\hat{Z}B = \hat{Z}_1 = 22,5^\circ$.

(β) Επειδή τα τρίγωνα ΔΓΑ και ΔΕΖ είναι ορθογώνια ισοσκελή θα έχουμε $\Delta\hat{A}\Gamma = \Delta\hat{E}Z = 45^\circ$, οπότε οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ τεμνόμενες από την ευθεία ΑΕ σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες. Επομένως οι ευθείες ΑΓ και ΕΖ είναι παράλληλες.

Πρόβλημα 4

Ένας πεζοπόρος περπατάει από το χωριό Α για να πάρει το τρένο στην πόλη Β. Ο πεζοπόρος σε μία ώρα προχώρησε κατά 4 χιλιόμετρα και τότε διαπίστωσε ότι περπατώντας με αυτή την ταχύτητα θα έφθανε στο σταθμό μία ώρα αργότερα από την αναχώρηση του τρένου. Για αυτό το λόγο στο υπόλοιπο της διαδρομής κινήθηκε με 6 χιλιόμετρα την ώρα και έτσι έφθασε στο σταθμό μισή ώρα νωρίτερα από την αναχώρηση του τρένου. Να βρείτε την απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β.

Λύση

Έστω ότι η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β είναι x χιλιόμετρα. Με την ταχύτητα που έτρεχε ο πεζοπόρος θα κάλυπτε την απόσταση σε $\frac{x}{4}$ ώρες, οπότε η ώρα που ξεκινούσε από το χωριό Α και η ώρα αναχώρησης του τρένου διέφεραν κατά $\frac{x}{4}-1$ ώρες.

Μετά την πρώτη ώρα ο χρόνος που είχε ο πεζοπόρος για να φθάσει έγκαιρα στο σταθμό ήταν $\left(\frac{x}{4}-1\right)-1=\frac{x}{4}-2$ ώρες. Τα χιλιόμετρα που απέμεναν ήταν $x-4$ και για να τα καλύψει ο πεζοπόρος χρειάστηκε $\frac{x-4}{6}$ ώρες. Σύμφωνα με την υπόθεση θα έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{x}{4}-2-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{1}{2}+2 \Leftrightarrow \frac{x}{4}-\frac{x-4}{6}=\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x}{12}-\frac{2x-8}{12}=\frac{30}{12} \Leftrightarrow 3x-(2x-8)=30 \Leftrightarrow 3x-2x+8=30 \Leftrightarrow x=22.$$

Επομένως η απόσταση του χωριού Α από το σταθμό του τρένου στη πόλη Β ήταν 22 χιλιόμετρα.

Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}, \text{ αν δίνεται ότι } \alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4},\ \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3},\ \gamma=-\frac{27}{16}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\alpha=\left(-\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(-\frac{3}{2}\right)^{4}=\frac{81}{16},\ \beta=\left(-\frac{3}{2}\right)^{3}=-\frac{27}{8},\ \gamma=-\frac{27}{16},$$

οπότε οι δύο όροι του Α γίνονται:

$$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=\left(\frac{81}{16}\right)^3+\left(-\frac{27}{8}\right)^3+\left(-\frac{27}{16}\right)^3=\left(\frac{3^4}{2^4}\right)^3+\left(-\frac{3^3}{2^3}\right)^3+\left(-\frac{3^3}{2^4}\right)^3$$

$$=\frac{3^{12}}{2^{12}}-\frac{3^9}{2^9}-\frac{3^9}{2^{12}}=\frac{3^{12}}{2^{12}}-\frac{2^3\cdot 3^9}{2^{12}}-\frac{3^9}{2^{12}}=\frac{3^{12}-2^3\cdot 3^9-3^9}{2^{12}}$$

$$=\frac{3^9\cdot\left(3^3-2^3-1\right)}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot(27-8-1)}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot 18}{2^{12}}=\frac{3^9\cdot 3^2\cdot 2}{2^{12}}=\frac{3^{11}}{2^{11}},$$

$$\alpha\beta\gamma=\frac{81}{16}\cdot\left(-\frac{27}{8}\right)\cdot\left(-\frac{27}{16}\right)=\frac{3^4}{2^4}\cdot\frac{3^3}{2^3}\cdot\frac{3^3}{2^4}=\frac{3^{10}}{2^{11}}$$

Επομένως, έχουμε:

$$\mathrm{A}=\frac{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3}{\alpha\beta\gamma}=\frac{\frac{3^{11}}{2^{11}}}{\frac{3^{10}}{2^{11}}}=\frac{3^{11}\cdot 2^{11}}{3^{10}\cdot 2^{11}}=3$$

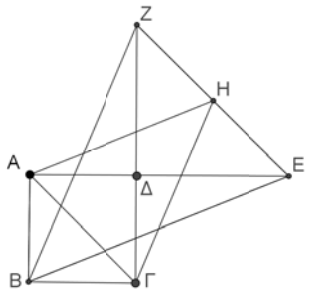
Πρόβλημα 2

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α. Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{E}=\mathrm{B}\Delta$ και την πλευρά ΓΔ κατά τμήμα $\Delta\mathrm{Z}=\mathrm{B}\Delta$. Αν Η είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΕΖ, τότε:

(α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΕ.

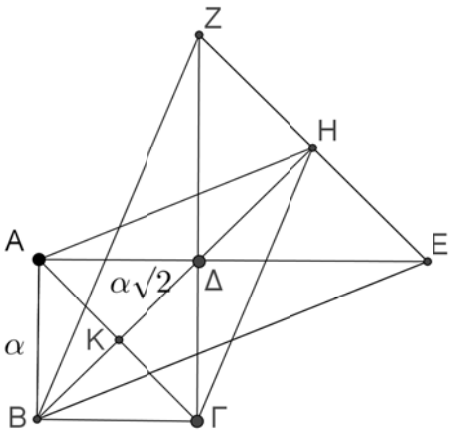
(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ

(γ) Να βρείτε το λόγο των εμβαδών των τριγώνων ΒΕΖ και ΑΓΗ.



Σημείωση: *Στην κόλλα σας να κάνετε το δικό σας σχήμα.*

Λύση



Σχήμα 1

(α) Από την υπόθεση έχουμε: $\text{ΑΒ} = \text{ΒΓ} = \text{ΓΔ} = \text{ΔΑ} = \alpha$ και $\text{ΒΔ} = \text{ΔΕ} = \text{ΔΖ} = \alpha\sqrt{2}$. Τότε είναι $\text{ΑΕ} = \alpha + \alpha\sqrt{2}$ και από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε:

$$\text{ΒΕ} = \sqrt{\left(\alpha + \alpha\sqrt{2}\right)^2 + \alpha^2} = \sqrt{\alpha^2\left(4 + 2\sqrt{2}\right)} = \alpha\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}.$$

(β) Επειδή Η είναι το μέσο της βάσης ΕΖ του τριγώνου ΔΕΖ η ευθεία ΔΗ θα είναι μεσοκάθετη της βάσης Το τρίγωνο ΔΖΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές με $\text{ΔΕ} = \text{ΔΖ} = \alpha\sqrt{2}$, οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε ότι:

$$\text{ΕΖ} = \sqrt{\text{ΕΔ}^2 + \text{ΔΖ}^2} = \sqrt{2\alpha^2 + 2\alpha^2} = 2\alpha.$$

Όμως και το τρίγωνο ΔΗΕ είναι ορθογώνιο ισοσκελές, (ΔΗ κάθετη στη βάση ΕΖ και $\Delta\hat{\text{Ε}}\text{Η} = 45^\circ$), οπότε ότι: $\text{ΔΗ} = \text{ΗΕ} = \dfrac{\text{ΕΖ}}{2} = \alpha$. Έτσι έχουμε $\text{ΔΗ} = \alpha = \text{ΔΑ} = \text{ΔΓ}$, οπότε το Δ απέχει ίσες αποστάσεις από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΓΗ.

(γ) Η ευθεία ΒΗ είναι μεσοκάθετη της διαγωνίου ΑΓ και έστω ότι την τέμνει στο σημείο Κ. Ομοίως όπως στο ερώτημα (α), μπορούμε να βρούμε ότι:

$$\text{ΒΖ} = \alpha\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} = \text{ΒΕ}.$$

Επομένως και το σημείο Β ανήκει στη μεσοκάθετη του ΕΖ, οπότε τα σημεία Β, Δ και Η είναι συνευθειακά. Τότε είναι

$$\text{ΚΗ} = \text{ΚΔ} + \text{ΔΗ} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2} + \alpha = \frac{\alpha\left(2 + \sqrt{2}\right)}{2}, \text{ΒΗ} = \text{ΒΔ} + \text{ΔΗ} = \alpha\sqrt{2} + \alpha,\ \text{ΑΓ} = \alpha\sqrt{2},$$

Επομένως, έχουμε

$$\text{Ε}\left(\text{ΑΓΗ}\right) = \frac{1}{2}\cdot\alpha\sqrt{2}\cdot\frac{\alpha\left(2 + \sqrt{2}\right)}{2} = \frac{\alpha^2\left(1 + \sqrt{2}\right)}{2},$$

$$\text{Ε}\left(\text{ΒΕΖ}\right) = \frac{1}{2}\cdot 2\alpha\cdot\left(\alpha + \alpha\sqrt{2}\right) = \alpha^2\left(1 + \sqrt{2}\right),$$

οπότε ο ζητούμενος λόγος εμβαδών είναι: $\dfrac{\text{Ε}\left(\text{ΒΕΖ}\right)}{\text{Ε}\left(\text{ΑΓΗ}\right)} = 2$.

Πρόβλημα 3

(α) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.

(β) Να βρείτε πόσα πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9 υπάρχουν μεταξύ των αριθμών 1 και 10^5.

Λύση

(α) Τα πολλαπλάσια του 9 μεταξύ 1 και $10^5 = 100000$ είναι της μορφής $9x$, όπου x θετικός ακέραιος. Έχουμε

$$1 < 9x < 100000 \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < \frac{100000}{9} \Leftrightarrow \frac{1}{9} < x < 11111 + \frac{1}{9} \Leftrightarrow x \in \{1, 2, ..., 11111\},$$

αφού ο x είναι θετικός ακέραιος. Επομένως, μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9.

(β) Βρήκαμε στο ερώτημα (α) ότι μεταξύ του 1 και του 100000 υπάρχουν 11111 πολλαπλάσια του 9. Ομοίως βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 16666

πολλαπλάσια του 6. Από τα παραπάνω πολλαπλάσια, μετριούνται δύο φορές αυτά που είναι κοινά πολλαπλάσια του 6 και του 9. Αυτά είναι τα πολλαπλάσια του ΕΚΠ(6,9) = 18. Όπως στο ερώτημα (α), βρίσκουμε ότι μεταξύ 1 και 100000 υπάρχουν 5555 πολλαπλάσια του 18. Επομένως μεταξύ των αριθμών 1 και 100000 υπάρχουν

$$11111+16666-5555=27777-5555=22222$$

πολλαπλάσια είτε του 6 είτε του 9.

Πρόβλημα 4

Μια μέρα ο Γιώργος καθώς πηγαίνει από το σπίτι στο σχολείο και έχει διανύσει το $\alpha\%$ της απόστασης, βλέπει ότι έχει αργήσει. Αποφασίζει να γυρίσει πίσω στο σπίτι, να πάρει το ποδήλατο και να πάει με αυτό στο σχολείο. Αν υποθέσουμε ότι ο Γιώργος περπατάει με 6 χιλιόμετρα την ώρα, ενώ με το ποδήλατο πηγαίνει με 15 χιλιόμετρα την ώρα, για ποιες τιμές του α συμφέρει να γυρίσει πίσω για να χρησιμοποιήσει το ποδήλατο;

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Έστω x τα χιλιόμετρα είναι η απόσταση από το σπίτι στο σχολείο.

Με τα πόδια ο Γιώργος κάνει τη διαδρομή σε $\frac{x}{6}$ ώρες. Αν συνεχίσει την αρχική πορεία του, αφού έχει διανύσει τα $\frac{\alpha}{100}$ θα χρειαστεί ακόμη

$$\frac{x}{6}-\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{x}{6}=\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{x}{6} \text{ ώρες}$$

για να φθάσει στο σχολείο.

Αν επιστρέψει να πάρει το ποδήλατο, θα χρειαστεί $\frac{\alpha}{100}\cdot\frac{x}{6}$ ώρες να φθάσει στο σημείο που ξεκίνησε και στη συνέχεια θα χρειαστεί άλλες $\frac{x}{15}$ ώρες για να φθάσει στο σχολείο του. Άρα ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί θα είναι:

$$\frac{\alpha x}{600}+\frac{x}{15}=\left(\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\right)\cdot x \text{ ώρες.}$$

Για να τον συμφέρει η χρησιμοποίηση του ποδηλάτου πρέπει και αρκεί να ισχύει:

$$\left(\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\right)\cdot x\le\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{x}{6}\overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow}\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\le\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)\cdot\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\alpha}{600}+\frac{1}{15}\le\frac{100-\alpha}{600}\Leftrightarrow\alpha+40\le 100-\alpha\Leftrightarrow 2\alpha\le 60\Leftrightarrow\alpha\le 30.$$

2^{ος} τρόπος

Ας υποθέσουμε ότι ο Γιώργος αποφάσισε να επιστρέψει σπίτι όταν είχε καλύψει x χιλιόμετρα και ότι από εκείνο το σημείο ως το σχολείο η απόσταση είναι y χιλιόμετρα. Επομένως, αν συνέχιζε το περπάτημα, για να φτάσει στο σχολείο ήθελε ακόμη χρόνο $\frac{y}{6}$ (απόσταση προς ταχύτητα). Ενώ τελικά έκανε χρόνο $\frac{x}{6}$ μέχρι να γυρίσει ξανά στο σπίτι και επιπλέον $\frac{x+y}{15}$ μέχρι να φτάσει από το σπίτι στο σχολείο με το ποδήλατο, δηλαδή ο χρόνος που έκανε συνολικά είναι

$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}$. Για να τον συμφέρει αυτό, θα πρέπει αυτός ο χρόνος να είναι μικρότερος ή ίσος από τον χρόνο που χρειαζόταν αν συνέχιζε με τα πόδια, δηλαδή η επιλογή του ήταν καλή αν

$$\frac{x}{6}+\frac{x+y}{15}\le\frac{y}{6}\Leftrightarrow 5x+2(x+y)\le 5y\Leftrightarrow 7x\le 3y\Leftrightarrow 10x\le 3x+3y\Leftrightarrow \frac{x}{x+y}\le\frac{3}{10},$$

δηλαδή αν το ποσοστό είναι μικρότερο ή ίσο του 30%.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς την εξίσωση

$$x^2+4x-9=4|x|.$$

Λύση

Για $x\ge 0$ η εξίσωση γίνεται:

$$x^2-9=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{9}\Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-3,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η λύση: $x=3$.

Για $x<0$ η εξίσωση γίνεται

$$x^2+8x-9=0, \qquad (2)$$

με διακρίνουσα $\Delta=64+36=100$. Επομένως, η εξίσωση αυτή έχει 2 διαφορετικές μεταξύ τους λύσεις στο $\mathbb{R}$, τις

$$x=\frac{-8\pm 10}{2}\Leftrightarrow x=-9 \text{ ή } x=1,$$

από τις οποίες είναι δεκτή μόνο η $x=-9$.

Επομένως, η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $x=3$ και $x=-9$.

Πρόβλημα 2

Βρείτε όλους τους τριψήφιους θετικούς ακέραιους $\overline{abc}=100a+10b+c$ που ικανοποιούν την εξίσωση:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c.$$

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση με αγνώστους τα ψηφία του αριθμού γράφεται:

$$\overline{abc}=(a+b+c)^2+a+b+c\Leftrightarrow 100a+10b+c=(a+b+c)^2+a+b+c$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)^2=99a+9b\Leftrightarrow (a+b+c)^2=9(11a+b).$$

Επειδή $1\le a\le 9, 0\le b\le 9$, από την τελευταία ισότητα μπορούμε να έχουμε έναν περιορισμό για τον αριθμό $(a+b+c)^2$. Πράγματι, έχουμε

$$9\cdot(11\cdot 1+0)=99\le 9(11a+b)\le 9(11\cdot 9+9)=972$$

$$\Rightarrow 99\le (a+b+c)^2\le 972\Rightarrow 10\le a+b+c\le 31$$

Όμως είναι $a+b+c\le 27$, οπότε: $10\le a+b+c\le 27$.

Επίσης από την ισότητα $(a+b+c)^2=9(11a+b)$ προκύπτει ότι ο αριθμός $(a+b+c)^2$ είναι πολλαπλάσιο του 9, οπότε ο αριθμός $a+b+c$ θα είναι πολλαπλάσιο του 3. Πράγματι, αν ήταν $a+b+c\ne 3k$, όπου k θετικός ακέραιος, τότε θα είχαμε τις περιπτώσεις $a+b+c=3k+1$ ή $a+b+c=3k+2$, $k\in\mathbb{Z}$, από τις