Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη $\frac{\alpha}{4}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 4. (1)

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{12}$ και δίνει στο Γιάννη $\frac{11\beta}{12}$.

Επομένως, ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12}$ καραμέλες, ενώ ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει $6\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{12}\right)=\frac{3\alpha}{4}+\frac{11\beta}{12} \Leftrightarrow \frac{3\alpha}{4}=\frac{5\beta}{12} \Leftrightarrow 9\alpha=5\beta$. (2)

Για να ισχύει η (2), πρέπει το α να είναι πολλαπλάσιο του 5. (3)

Από τις (1) και (3) συνάγουμε ότι το α πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του $5\cdot 4=20$, οπότε η ελάχιστη τιμή του α είναι 20. Επομένως, από τη σχέση (2) παίρνουμε $\beta=36$.

Επομένως, ο ελάχιστος αριθμός από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $20+36=56$.

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να υπολογισθεί η τιμή της παράστασης

$$\text{A}=\left(\frac{25}{x+8}-\frac{\sqrt[3]{x}+2}{\sqrt[3]{x^2}-2\cdot\sqrt[3]{x}+4}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{x^4}+8\cdot\sqrt[3]{x}}{9-\sqrt[3]{x^2}}+\frac{21-\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}},\ \text{όπου } x>0 \text{ και } x\neq 27.$$

Λύση.

Θέτουμε: $\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}=y>0,\ x>0 \Rightarrow x=y^3,\ x,y>0$, οπότε η Α γράφεται:

$$\text{A}=\left(\frac{25}{y^3+8}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right)\cdot\frac{y^4+8y}{9-y^2}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\left[\frac{25}{(y+2)(y^2-2y+4)}-\frac{y+2}{y^2-2y+4}\right]\cdot\frac{y(y^3+8)}{(3-y)\cdot(3+y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{[5^2-(y+2)^2]}{(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}\cdot\frac{y\cdot(y+2)\cdot(y^2-2y+4)}{(3+y)\cdot(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{(7+y)(3-y)y(y+2)(y^2-2\cdot y+4)}{(y+2)(y^2-2y+4)(3+y)(3-y)}+\frac{21-y^2}{3+y}$$

$$=\frac{y(7+y)}{3+y}+\frac{21-y^2}{3+y}=\frac{7y+y^2+21-y^2}{3+y}=\frac{7(y+3)}{y+3}=7.$$

.

Πρόβλημα 2

Να εξετάσετε, αν η εξίσωση $64x^2+16^{10}x-2016^{2016}=0$ έχει ρητή ρίζα.

Λύση

Αν η εξίσωση έχει ρητή λύση, τότε η διακρίνουσα πρέπει να είναι τέλειο τετράγωνο ρητού. Έχουμε ότι $\Delta = 16^{20} + 4 \cdot 64 \cdot 2016^{2016}$ και ας υποθέσουμε ότι:

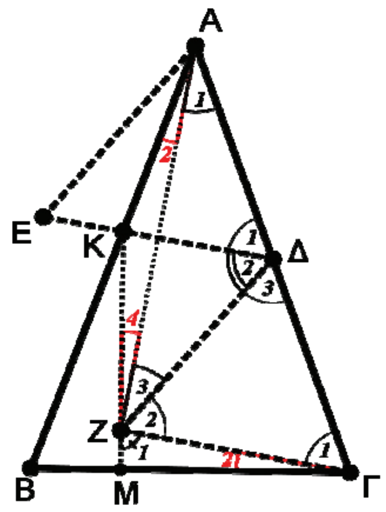
$$16^{20} + 4 \cdot 64 \cdot 2016^{2016} = \kappa^2,$$ όπου κ ρητός.

Αφού όμως το αριστερό μέλος είναι ακέραιος, θα πρέπει και ο κ να είναι ακέραιος. Παρατηρούμε ότι το τελευταίο ψηφίο του αριθμού 16^{20} είναι 6 και το ίδιο ισχύει για το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $4 \cdot 64 \cdot 2016^{2016} = 256 \cdot 2016^{2016}$. Επομένως το τελευταίο ψηφίο του αριθμού $16^{20} + 4 \cdot 64 \cdot 2016^{2016}$ είναι το 2, αφού $6 + 6 = 12$. Όμως, κάθε τέλειο τετράγωνο λήγει σε κάποιο από τα ψηφία $0,1,4,5,6,9$, οπότε καταλήγουμε σε άτοπο. Επομένως η εξίσωση δεν έχει ρητή ρίζα.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ $(AB = A\Gamma)$ με $\hat{A} = 40^0$ και έστω Δ το μέσο της πλευράς $A\Gamma$. Θεωρούμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $AE\Delta$, $\Delta\Gamma Z$ των οποίων οι κορυφές E, Z βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο με ακμή την $A\Gamma$ και στο οποίο ανήκει η κορυφή B. Αν η $E\Delta$ τέμνει την AB στο K, να αποδείξετε ότι η KZ είναι κάθετη στη $B\Gamma$.

Λύση



Σχήμα 3

Έστω ότι η KZ τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο M. Θα αποδείξουμε ότι $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^0$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta Z$ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = 60^0$.

Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$) με $\hat{A} = 40^0$ (οπότε από $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^0$) έχουμε: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 70^0$.

$$\text{Άρα } \hat{\Gamma}_2 = \hat{\Gamma} - \hat{\Gamma}_1 = 70^0 - 60^0 = 10^0 \qquad (1).$$

Ισχύει $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 + \hat{\Delta}_3 = 180^0$ και επειδή $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_3 = 60^0$ (ως γωνίες ισόπλευρων τριγώνων), συμπεραίνουμε ότι: $\hat{\Delta}_2 = 60^0$.

Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές (διότι $A\Delta = \Delta\Gamma = \Delta Z$) και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 60^0$.

Δηλαδή η ΔK είναι διχοτόμος της γωνίας $A\hat{\Delta}Z$, οπότε θα είναι και μεσοκάθετος της βάσης AZ του (ισοσκελούς) τριγώνου $A\Delta Z$.

Εφόσον η ΔK είναι μεσοκάθετη της AZ, το τρίγωνο AKZ είναι ισοσκελές.

Από το ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta Z$ έχουμε: $\hat{A}_1 = \hat{Z}_3$.

Από το ισοσκελές τρίγωνο AKZ έχουμε: $\hat{A}_2 = \hat{Z}_4$.

Προσθέτοντας τις σχέσεις κατά μέλη έχουμε: $\hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 40^0$.

Από τη ισότητα $\hat{Z}_1 + \hat{Z}_2 + \hat{Z}_3 + \hat{Z}_4 = 180^0$ (με δεδομένο ότι $\hat{Z}_2 = 60^0$), καταλήγουμε:

$$\hat{Z}_1 = 80^0 \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις $(1),(2)$ έχουμε: $\hat{\Gamma}_2 + \hat{Z}_1 = 90^0$.

Πρόβλημα 4

Τρεις φίλοι, ο Γιάννης και ο Βαγγέλης και ο Βασίλης, έχουν μία σακούλα με καραμέλες. Ο Γιάννης βάζει το χέρι μέσα στη σακούλα, παίρνει κάποιες καραμέλες, και από αυτές που πήρε κρατάει τα $\frac{3}{4}$ και τις υπόλοιπες (από αυτές που πήρε) τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Ο Βαγγέλης παίρνει κάποιες από τις υπόλοιπες που έμειναν στη σακούλα, κρατάει το $\frac{1}{4}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Τέλος ο Βασίλης παίρνει τις υπόλοιπες που είχαν μείνει στη σακούλα κρατάει το $\frac{1}{6}$ από αυτές και τις υπόλοιπες από αυτές που έβγαλε τις μοιράζει εξίσου στους άλλους δύο. Αν σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει θετικό ακέραιο αριθμό από καραμέλες και τελικά οι καραμέλες του Γιάννη είναι τριπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη και οι καραμέλες του Βαγγέλη είναι διπλάσιες από τις καραμέλες του Βασίλη, να βρείτε τον ελάχιστο αριθμό από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα.

Λύση

Έστω α οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Γιάννης και β οι καραμέλες που πήρε από τη σακούλα ο Βαγγέλης και γ ο Βασίλης. Τότε ο Γιάννης κρατάει $\frac{3\alpha}{4}$ και δίνει στο Βαγγέλη και το Βασίλη $\frac{\alpha}{8}$.

Αντίστοιχα, ο Βαγγέλης κρατάει $\frac{\beta}{4}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βασίλη $\frac{3\beta}{8}$. Και αφού σε κάθε μοιρασιά καθένας παίρνει ακέραιο αριθμό από καραμέλες, πρέπει το β να είναι πολλαπλάσιο του 8. (1)

Τέλος, ο Βασίλης κρατάει $\frac{\gamma}{6}$ και δίνει στο Γιάννη και το Βαγγέλη από $\frac{5\gamma}{12}$.

Επομένως ο Γιάννης έχει συνολικά $\frac{3\alpha}{4} + \frac{3\beta}{8} + \frac{5\gamma}{12}$ καραμέλες, ο Βαγγέλης έχει $\frac{\alpha}{8} + \frac{\beta}{4} + \frac{5\gamma}{12}$ και ο Βασίλης έχει $\frac{\alpha}{8} + \frac{3\beta}{8} + \frac{\gamma}{6}$.

Επομένως πρέπει να ισχύει

$$3\left(\frac{\alpha}{8} + \frac{3\beta}{8} + \frac{\gamma}{6}\right) = \frac{3\alpha}{4} + \frac{3\beta}{8} + \frac{5\gamma}{12} \Leftrightarrow \frac{3\beta}{4} + \frac{\gamma}{12} = \frac{3\alpha}{8} \Leftrightarrow 18\beta + 2\gamma = 9\alpha. \quad (2)$$

$$2\left(\frac{\alpha}{8}+\frac{3\beta}{8}+\frac{\gamma}{6}\right)=\frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{4}+\frac{5\gamma}{12} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{8}+\frac{\beta}{2}=\frac{\gamma}{12} \Leftrightarrow 3\alpha+12\beta=2\gamma \qquad (3)$$

Προσθέτοντας τις (2), (3) κατά μέλη έχουμε ότι :

$$30\beta=6\alpha \Leftrightarrow 5\beta=\alpha$$

Οπότε από την (3) προκύπτει ότι:

$$27\beta=2\gamma\,.$$

Το β αφού είναι πολλαπλάσιο του 8 η ελάχιστη τιμή του είναι 8. Οπότε η ελάχιστη τιμή για το α είναι $\alpha=5\cdot 8=40$ και για το $\gamma=\frac{27\cdot 8}{2}=27\cdot 4=108$. Δηλαδή η ελάχιστη τιμή από καραμέλες που μπορεί να περιέχει η σακούλα είναι $8+40+108=156$.

Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος $\alpha_1=(2-x)^2$, $\alpha_2=2^2+x^2,\ldots$, όπου x πραγματικός αριθμός. Να προσδιορίσετε:

(α) Το άθροισμα των n πρώτων όρων της.

(β) Την τιμή του $n,(n>1)$, για την οποία ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με το τετράγωνο μιας παράστασης του x, για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

(α) Η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι: $\omega=2^2+x^2-(2-x)^2=4x.$ Επομένως το άθροισμα των n πρώτων όρων της θα είναι:

$$S_n=\frac{\left[2(2-x)^2+4(n-1)x\right]n}{2}=\left(x^2+2(n-3)x+4\right)n.$$

(β) Ο μέσος όρος των n πρώτων όρων της προόδου ισούται με

$$\frac{S_n}{n}=x^2+2(n-3)x+4$$

και είναι τριώνυμο μεταβλητής x. Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=4(n-3)^2-16=4\left(n^2-6n+5\right)$. Επομένως το τριώνυμο ισούται με τέλειο τετράγωνο μιας πολυωνυμικής παράστασης του x, αν και μόνον, αν $\Delta=0 \Leftrightarrow n^2-6n+5=0 \Leftrightarrow n=1$ ή $n=5$.

Η τιμή $n=1$ απορρίπτεται, γιατί $n>1$. Επομένως, για $n=5$ είναι

$$\frac{S_5}{5}=x^2+4x+4=(x+2)^2.$$

Αν ζητήσουμε οποιαδήποτε αλγεβρική παράσταση του x, τότε έχουμε $\frac{S_n}{n}=x^2+2(n-3)x+4\geq 0$, για $x\in\mathbb{R}$, εφόσον $\Delta\leq 0 \Leftrightarrow 1\leq n\leq 5$. Τότε, για $n\in\{2,3,4,5\}$ ισχύει: $\frac{S_n}{n}=\left(\sqrt{x^2+2(n-3)x+4}\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Πρόβλημα 2