

$$E(\text{ΑΓΜΟ}) = (\text{βάση}) \cdot (\text{ύψος}) = \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} \quad (2)$$

Επίσης

$$E_{\kappa.τομέα}(\widehat{\text{ΟΑΜ}}) = \frac{60^\circ}{360^\circ} \pi \left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = \frac{\pi\alpha^2}{24} \quad (3)$$

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$$E(\widehat{\text{ΓΑΜ}}) = E(\text{ΑΓΒΟ}) - E_{\kappa.τομέα}(\widehat{\text{ΟΑΜ}}) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi\alpha^2}{24} = \frac{(3\sqrt{3} - \pi)\alpha^2}{24}.$$

Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\alpha^2 - 1}{n^2 + \alpha n} \cdot \left(\frac{n^2}{n-1} - n\right) \cdot \frac{\alpha + n - \alpha n^3 - n^4}{1 - \alpha^2}$, με α πραγματικό

αριθμό μεγαλύτερο του 1 και n θετικό ακέραιο, $n > 1$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $A = n^2 + n + 1$

(β) Δεν είναι δυνατόν ο A να είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)} \cdot \left(\frac{n^2}{n-1} - n\right) \cdot \frac{(\alpha+n) - n^3(\alpha+n)}{-(\alpha-1)(\alpha+1)} \\ &= -\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)} \cdot \left(\frac{n^2 - n^2 + n}{n-1}\right) \cdot \frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)} \\ &= -\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{n(n+\alpha)} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) \cdot \frac{(\alpha+n)(1-n^3)}{(\alpha-1)(\alpha+1)} \\ &= -\frac{n(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+n)(1-n^3)}{n(n+\alpha)(n-1)(\alpha-1)(\alpha+1)} = \frac{n^3 - 1}{n-1} = n^2 + n + 1. \end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι: $n^2 < A = n^2 + n + 1 < n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$, δηλαδή ο ακέραιος A βρίσκεται μεταξύ των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων, οπότε δεν μπορεί να είναι τέλειο τετράγωνο κάποιου ακεραίου.

Πρόβλημα 2

Στις εξετάσεις του Α.Σ.Ε.Π. τα εξεταζόμενα μαθήματα βαθμολογούνται από 0 μέχρι 100. Ένας υποψήφιος βαθμολογήθηκε σε όλα τα μαθήματα με διαφορετικό βαθμό και ο μέσος όρος των βαθμών του ήταν 40. Αν παραλείψουμε το μικρότερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 46. Αν παραλείψουμε το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των υπόλοιπων βαθμών του είναι 28, ενώ, αν παραλείψουμε και το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του ο μέσος όρος των βαθμών που απομένουν είναι 32. Να βρείτε τον αριθμό των μαθημάτων, το μικρότερο και το μεγαλύτερο βαθμό του υποψηφίου.

Λύση

Έστω ότι τα εξεταζόμενα μαθήματα ήταν n και οι βαθμοί του υποψηφίου ήταν οι $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ με τη διάταξη: $x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n$. Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = 40n \quad (1)$$

$$x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n = 46(n-1) \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = 28(n-1) \quad (3)$$

$$x_2 + \dots + x_{n-1} = 32(n-2) \quad (4)$$

Με αφαίρεση των (2), (3) και (4) από την εξίσωση (1) λαμβάνουμε:

$$x_1 = 46 - 6n, \quad x_n = 12n + 28, \quad x_1 + x_n = 8n + 64,$$

από τις οποίες προκύπτει η εξίσωση:

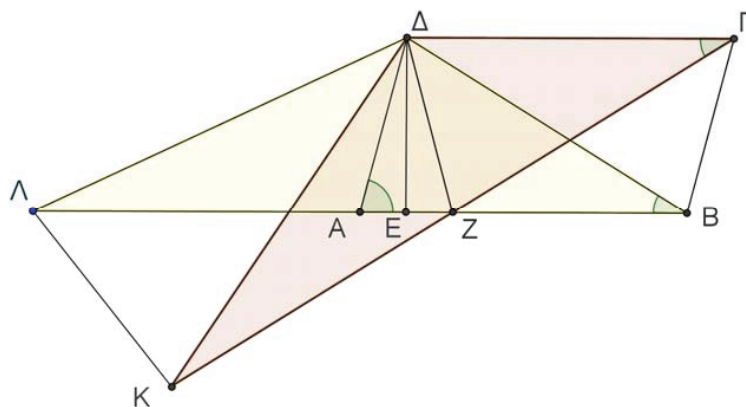
$$x_1 + x_n = (46 - 6n) + (12n + 28) = 8n + 64 \Leftrightarrow 2n = 10 \Leftrightarrow n = 5,$$

οπότε θα είναι $x_1 = 16$ και $x_5 = 88$.

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $AB = \Gamma\Delta = B\Delta$. Φέρουμε το ύψος του ΔE , όπου E σημείο της πλευράς AB . Έστω Z το συμμετρικό της κορυφής A ως προς κέντρο το σημείο E . Έστω επίσης K το συμμετρικό της κορυφής Γ ως προς κέντρο το σημείο Z και Λ το συμμετρικό της κορυφής B ως προς κέντρο το σημείο A . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές.

Λύση



Σχήμα 3

Έχουμε $\Delta Z = \Delta A$, λόγω συμμετρίας ως προς την ευθεία του ύψους ΔE . Επίσης είναι $\Delta A = B\Gamma$, από το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Επομένως θα είναι $\Delta Z = B\Gamma$. Επιπλέον

$$\hat{\Delta ZB} = 180^\circ - \hat{\Delta ZA} = 180^\circ - \hat{\Delta AB} = \hat{A\hat{B}\Gamma}.$$

Επομένως τα τρίγωνα ΔZB και $ZB\Gamma$ έχουν δύο πλευρές τους ίσες μία προς μία ($\Delta Z = B\Gamma$ και ZB κοινή) και τις περιεχόμενες γωνίες των πλευρών αυτών ίσες. Άρα είναι ίσα, οπότε θα έχουν και

- $\Delta B = Z\Gamma \Rightarrow AB = Z\Gamma \Rightarrow 2 \cdot AB = 2 \cdot Z\Gamma \Rightarrow B\Lambda = \Gamma K$

- $Z\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{Z}B \Rightarrow Z\hat{B}\Delta = \Delta\hat{\Gamma}Z$, αφού από $\Delta\Gamma \parallel ZB$ ισχύει ότι: $\Gamma\hat{Z}B = \Delta\hat{\Gamma}Z$.

Έτσι τα τρίγωνα $\Delta B\Lambda$ και $\Delta\Gamma K$ έχουν: $\Delta B = \Delta\Gamma$, $B\Lambda = \Gamma K$ και $\Delta\hat{\Gamma}K = \Delta\hat{B}\Lambda$, οπότε είναι ίσα. Άρα θα έχουν και τις πλευρές τους $\Delta\Lambda$ και ΔK ίσες.

Πρόβλημα 4

Ο τετραψήφιος θετικός ακέραιος $\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 327 και υπόλοιπο 14. Επίσης ο αριθμός $\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x$ όταν διαιρεθεί με το άθροισμα των ψηφίων του δίνει πηλίκο 227 και υπόλοιπο 16. Να βρεθεί ο αριθμός \overline{xyzw} .

Λύση

Σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε τις εξισώσεις:

$$\overline{xyzw} = 1000x + 100y + 10z + w = 327(x + y + z + w) + 14 \quad (1)$$

$$\overline{wzyx} = 1000w + 100z + 10y + x = 227(x + y + z + w) + 16, \quad (2)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\overline{xyzw} - \overline{wzyx} = 999(x - w) + 90(y - z) = 100(x + y + z + w) - 2. \quad (3)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $17 \leq x + y + z + w \leq 30$, οπότε

$$1698 \leq 100(x + y + z + w) - 2 \leq 2998$$

$$\Rightarrow 1698 \leq 999(x - w) + 90(y - z) \leq 2998.$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει ότι $x - w \in \{1, 2, 3\}$, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Για $x - w = 1$ πρέπει $y - z \in \{8, 9\}$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.

- Για $x - w = 2$, από την (3) λαμβάνουμε:

$$9(y - z) = 10(x + y + z + w - 20) = \text{πολλαπλάσιο του } 10,$$

οπότε πρέπει: $y - z = 0$ και $x + y + z + w = 20$. Τότε από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\overline{xyzw} = 6554 \text{ και } \overline{wzyx} = 4556.$$

- Για $x - w = 3$ πρέπει $y - z = 0$, οπότε από την (3) δεν προκύπτει ακέραια λύση για το άθροισμα $x + y + z + w$.

Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Πρόβλημα 1

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{1}{x-3} + \frac{2}{x-2} + \frac{3}{x-1} = 3.$$

Λύση (1^{ος} τρόπος)

Για $x \in \mathbb{R} - \{1, 2, 3\}$ έχουμε: