Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x = \dfrac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)}$ και $y = \sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y.

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή του κλάσματος επί $\sqrt[8]{3}-1$ και εκτελώντας διαδοχικά τις εμφανιζόμενες διαφορές τετραγώνων, λαμβάνουμε

$$x = \frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[8]{3}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}-1\right)} = \frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt[8]{3}-1.$$

Επομένως έχουμε

$$x+1 = \sqrt[8]{3} < \sqrt[8]{4} = \sqrt[4]{2} = y.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1-\frac{|x-1|}{3} \geq 0 \quad \text{και} \quad \left(|x|-2\right)\cdot\left(|x|-5\right) \leq 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$1-\frac{|x-1|}{3} \geq 0 \Leftrightarrow |x-1| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 4. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση $\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right) \leq 0$ έχουμε:

$$\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right) \leq 0 \Leftrightarrow \left(|x|-2 \geq 0 \text{ και } |x|-5 \leq 0\right) \text{ ή } \left(|x|-2 \leq 0 \text{ και } |x|-5 \geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq |x \leq 5| \text{ ή } \left(|x| \leq 2 \text{ και } |x| \geq 5\right), \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow 2 \leq |x| \leq 5.$$

Όμως $|x| \geq 2 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$ και $|x| \leq 5 \Leftrightarrow -5 \leq x \leq 5$, οπότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$-5 \leq x \leq -2 \text{ ή } 2 \leq x \leq 5 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το δεδομένο σύστημα ανισώσεων αληθεύει για

$$x = -2 \text{ ή } 2 \leq x \leq 4.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ = ΑΓ > ΒΓ). Ο κύκλος $c_1(\Gamma, \mathrm{B\Gamma})$ (με κέντρο Γ και ακτίνα ΒΓ) τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\mathrm{A}, \mathrm{A\Delta})$ (με κέντρο Α και ακτίνα ΑΔ) τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και τον κύκλο $c_1(\Gamma, \mathrm{B\Gamma})$ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου ΑΔΖ τέμνει την ευθεία ΒΕ στο σημείο Μ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Λύση

(α) Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες τμημάτων:

$$\Gamma B = \Gamma\Delta = \Gamma Z \qquad (1) \qquad (\text{ακτίνες του κύκλου } c_1(\Gamma, B\Gamma))$$

$$A\Delta = AE = AZ \qquad (2) \qquad (\text{ακτίνες του κύκλου } c_2(A, A\Delta))$$

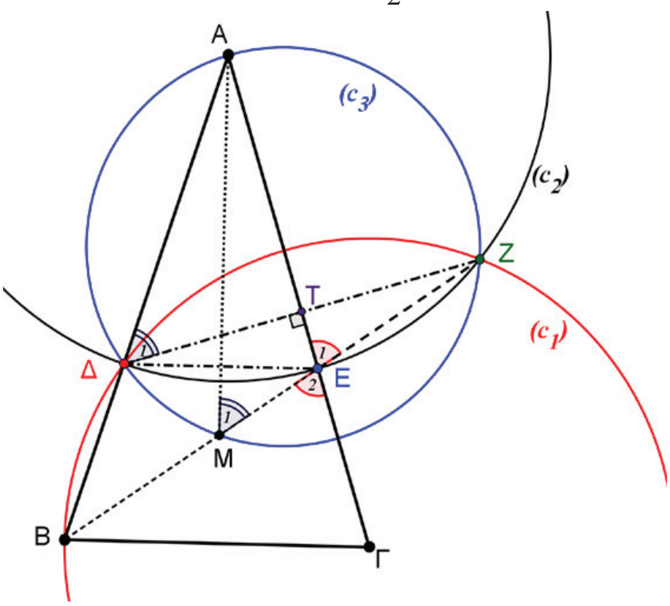
Επειδή το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές θα ισχύει: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$ και ομοίως από το ισοσκελές τρίγωνο $A\Delta E$ έχουμε: $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}$.

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE. Αυτά έχουν:

(α) η πλευρά $B\Gamma$ είναι κοινή, (β) $B\Delta = \Gamma E$, (γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}$.

Άρα τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE είναι ίσα, οπότε $BE = \Delta\Gamma \overset{(1)}{=} B\Gamma$, δηλαδή το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές και κατά συνέπεια

$$\hat{E}_2 = \hat{\Gamma} = 90^o - \frac{\hat{A}}{2}. \qquad (3)$$



Σχήμα 5

Εφόσον $A\Delta = AZ$ και $\Gamma\Delta = \Gamma Z$, η $A\Gamma$ (διάκεντρος των δύο κύκλων) είναι μεσοκάθετη της ΔZ (κοινή χορδή των δύο κύκλων). Επομένως τα σημεία Δ και Ζ είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΓ και ισχύει:

$$\hat{E}_1 = A\hat{E}Z = A\hat{E}\Delta = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2} \qquad (4)$$

Από τις σχέσεις (3) και (4) έπεται ότι:

$$\hat{E}_2 = B\hat{E}\Gamma = A\hat{E}Z = \hat{E}_1 = 90^\circ - \frac{\hat{A}}{2}, \qquad (5)$$

οπότε, δεδομένου ότι τα σημεία Α, Ε, Γ βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΑΓ, έπεται ότι οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ ή είναι αντικείμενες ημιευθείες με αρχή το Ε ή είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία ΑΓ. Το τελευταίο αποκλείεται, γιατί τότε θα είχαμε τις ευθείες ΕΔ και ΕΒ να συμπίπτουν, ως συμμετρικές και οι δύο με την ΕΖ ως προς την ευθεία ΑΓ, άτοπο.

Επομένως οι ημιευθείες ΕΒ και ΕΖ είναι αντικείμενες, δηλαδή τα σημεία Β, Ε και Ζ είναι συνευθειακά.

Στο ίδιο συμπέρασμα μπορούμε να φθάσουμε θεωρώντας το άθροισμα

$$\mathrm{B\hat{E}\Delta + \Delta\hat{E}A + A\hat{E}Z} = \hat{\mathrm{A}} + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) + \left(90^\circ - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2}\right) = 180^\circ,$$

οπότε η γωνία $\mathrm{B\hat{E}Z}$ είναι ευθεία γωνία και τα σημεία Β, Ε και Ζ βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\mathrm{A\hat{T}\Delta}$, έχουμε: $\hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Όμως οι γωνίες $\hat{\Delta}_1$ και $\hat{\mathrm{M}}_1$ είναι εγγεγραμμένες στον κύκλο $c_3 = (\mathrm{A}, \Delta, \mathrm{Z})$ και βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\mathrm{AZ}}$, οπότε έχουμε: $\hat{\mathrm{M}}_1 = \hat{\Delta}_1 = 90^o - \hat{\mathrm{A}}$. Επειδή η γωνία $\hat{\mathrm{E}}_1$, είναι εξωτερική στο τρίγωνο AEM, έχουμε:

$$\hat{\mathrm{E}}_1 = \hat{\mathrm{M}}_1 + \mathrm{M\hat{A}E} \Leftrightarrow \mathrm{M\hat{A}E} = \hat{\mathrm{E}}_1 - \hat{\mathrm{M}}_1 = 90^o - \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2} - \left(90^o - \hat{\mathrm{A}}\right) = \frac{\hat{\mathrm{A}}}{2},$$

οπότε η ευθεία ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$. Όμως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Gamma}$, οπότε η ευθεία ΑΜ είναι και μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Πρόβλημα 4

Θεωρούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b που είναι τέτοιοι ώστε

$$a^2 + 4b^2 = 2a + 12b - 5.$$

Να βρεθεί η μέγιστη δυνατή τιμή το αθροίσματος $a + b$ και οι τιμές των a, b για τις οποίες αυτή λαμβάνεται.

Λύση

Θέτουμε $s = a + b$, οπότε η δεδομένη εξίσωση γράφεται:

$$a^2 + 4(s-a)^2 = 2a + 12(s-a) - 5.$$

$$\Leftrightarrow 5a^2 - (8s-10)a + 4s^2 - 12s + 5 = 0 \qquad (1)$$

Για να έχει η εξίσωση (1) λύση ως προς a στους πραγματικούς αριθμούς, πρέπει να έχει μη αρνητική διακρίνουσα, δηλαδή πρέπει:

$$\Delta = (8s-10)^2 - 20(4s^2 - 12s + 5) \geq 0 \Leftrightarrow 4\left[(4s-5)^2 - 5(4s^2 - 12s + 5)\right] \geq 0 \Leftrightarrow -4s^2 + 20s \geq 0$$

$$\Leftrightarrow s(s-5) \leq 0 \Leftrightarrow (s \geq 0 \text{ και } s - 5 \leq 0) \text{ ή } (s \leq 0 \text{ και } s - 5 \geq 0) \Leftrightarrow 0 \leq s \leq 5.$$

Επομένως η μέγιστη δυνατή τιμή του αθροίσματος $s = a + b$ είναι 5. Για $s = 5$ είναι $\Delta = 0$, οπότε από την εξίσωση προκύπτει η λύση $a = 3$ και στη συνέχεια βρίσκουμε $b = 2$.

Β΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε στο επίπεδο τέσσερα διαφορετικά μεταξύ τους σημεία $\mathrm{O, A, B}$ και Γ, έτσι ώστε τα σημεία Ο, Α και Β να μην είναι συνευθειακά και έστω $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{\beta}$, $\overrightarrow{\mathrm{O\Gamma}} = \vec{\gamma}$. Αν ισχύει ή ισότητα

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\gamma}^2 = \overrightarrow{\Gamma \mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\Gamma \mathrm{B}},$$

να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ είναι κάθετο στη διαγώνιο ΟΔ του παραλληλογράμμου $\mathrm{OA\Delta B}$.

Λύση