$$x=\frac{55}{100}(x+y)\Leftrightarrow 100x=55x+55y\Leftrightarrow 9x=11y\Leftrightarrow y=\frac{9}{11}x \qquad (1).$$

Εφόσον το πλήθος των αγοριών που δεν μιλούν Γαλλικά είναι ίσο με το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν Γαλλικά, θα ισχύει:

$$x-a=\kappa\Leftrightarrow x=\kappa+a \qquad (2).$$

Τα αγόρια που μιλούν γαλλικά είναι τα $\frac{7}{11}$ των μαθητών που μιλούν γαλλικά.

Άρα:

$$\frac{7}{11}(\kappa+a)=a\overset{(2)}{\Leftrightarrow}\frac{7}{11}x=a \qquad (3).$$

Επειδή (τέλος) το πλήθος των κοριτσιών που μιλούν γαλλικά είναι 60, θα ισχύει η ισότητα:

$$y=\kappa+60.$$

Προσθέτοντας και στα δύο μέλη (της τελευταίας ισότητας) το a, έχουμε:

$$y=\kappa+60\Leftrightarrow y+a=\kappa+a+6\overset{(2)}{\Leftrightarrow}y+\alpha=x+60\overset{(1),(3)}{\Leftrightarrow}\frac{9}{11}x+\frac{7}{11}x=x+60\Leftrightarrow\frac{5}{11}x=60\Leftrightarrow x=132.$$

Άρα το πλήθος των αγοριών είναι 132, το πλήθος των κοριτσιών $y=\frac{9}{11}x=\frac{9}{11}\cdot 132=108$, οπότε το συνολικό πλήθος των μαθητών είναι 240.

Γ΄ τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x^3}{y^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{y}\right)^3,\ \ \mathrm{B}=\frac{243x^2+81y^2}{y}\ \text{ και }\ \Gamma=x^{-1}+y^{-1},\ \text{ όταν } x=3^{-3}, y=3^{-4}.$$

Λύση

Έχουμε

$$\mathrm{A}=\left(\frac{\left(3^{-3}\right)^3}{\left(3^{-4}\right)^3}+\frac{1}{3}\right):\left(\frac{3^{-3}}{3^{-4}}\right)^3=\left(\frac{3^{-9}}{3^{-12}}+\frac{1}{3}\right):\left(3^{-3+4}\right)^3=\left(3^{-9+12}+\frac{1}{3}\right):\left(3^1\right)^3$$

$$=\left(3^3+\frac{1}{3}\right):3^3=1+\frac{1}{3^4}=\frac{3^4+1}{3^4}=\frac{82}{81}.$$

$$\mathrm{B}=\frac{243\cdot\left(3^{-3}\right)^2 11+81\cdot\left(3^{-4}\right)^2}{3^{-4}}=\frac{3^5\cdot 3^{-6}+3^4\cdot 3^{-8}}{3^{-4}}=\frac{3^{-1}+3^{-4}}{3^{-4}}=\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=\frac{\frac{3^3+1}{3^4}}{\frac{1}{3^4}}=3^3+1=28.$$

$$\Gamma=3^3+3^4=27+81=108.$$

Πρόβλημα 2

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1$ και $Q(x)=4x^4-5x^2+1$.

(α) Να γράψετε τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ ως γινόμενα πολυωνύμων πρώτου ή το πολύ δευτέρου βαθμού.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$P(x)=16x^6-16x^4-x^2+1=16x^4\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)=\left(16x^4-1\right)\left(x^2-1\right)=$$
$$=\left(4x^2+1\right)\left(4x^2-1\right)\left(x^2-1\right)=\left(4x^2+1\right)(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$
$$Q(x)=4x^4-5x^2+1=4x^4-4x^2-x^2+1=4x^2\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)$$
$$=\left(4x^2-1\right)\left(x^2-1\right)=(2x-1)(2x+1)(x-1)(x+1).$$

(β) Έχουμε

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow 4x^2+1=\frac{5}{2}\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm 1,$$

με τον περιορισμό $Q(x)\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\frac{1}{2}$ και $x\neq\pm 1$.

Επομένως η δεδομένη εξίσωση δεν έχει λύση.

Πρόβλημα 3

Δύο θετικοί ακέραιοι $x,\ y$ με $x>y$, έχουν άθροισμα 2014. Η διαίρεση του μεγαλύτερου με τον μικρότερο δίνει πηλίκο ω και υπόλοιπο 97. Να βρείτε όλες τις δυνατές τιμές των x, y και ω.

Λύση

Σύμφωνα με την υπόθεση είναι $x=2014-y$ και

$$2014-y=\omega y+97,\ \text{με}\ y>97\ \text{και}\ \omega\geq 1$$
$$\Leftrightarrow(1+\omega)y=1917,\ \text{με}\ y>97\ \text{και}\ 1+\omega\geq 2$$
$$\Leftrightarrow(1+\omega)y=3^3\cdot 71,\ \text{με}\ y>97\ \text{και}\ 1+\omega\geq 2.$$

Επομένως ο y είναι διαιρέτης του $1917=3^3\cdot 71$ μεγαλύτερος από το 97, οπότε οι δυνατές τιμές του είναι

$$y=3\cdot 71=213\ \text{ή}\ \ y=3^2\cdot 71=639\ \text{ή}\ \ y=3^3\cdot 71=1917$$

- Για $y=213$, είναι $x=1801$ και $\omega=8$.
- Για $y=639$, είναι $x=1375$ και $\omega=2$.
- Για $y=1917$, είναι $x=97<y=1917$, άτοπο.

Πρόβλημα 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\text{ΑΒ}=\text{ΑΓ}$ και $\hat{\text{Α}}=30^\circ$. Εξωτερικά του τριγώνου κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΓΔ με $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Γ}=90^\circ$. Η μεσοκάθετη της πλευράς ΑΓ τέμνει την ΑΓ στο μέσο της Κ, την ΑΒ στο σημείο Λ και την προέκταση της πλευράς ΒΓ στο σημείο Μ. Αν είναι $\text{ΑΔ}=\alpha$, να υπολογίσετε συναρτήσει του α:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΚΛ.

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΜ και το μήκος της πλευράς ΒΓ .

Λύση

(α) Από το ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε

$$\text{ΑΓ}^2=\alpha^2+\alpha^2=2\alpha^2\Leftrightarrow\text{ΑΓ}=\alpha\sqrt{2},$$

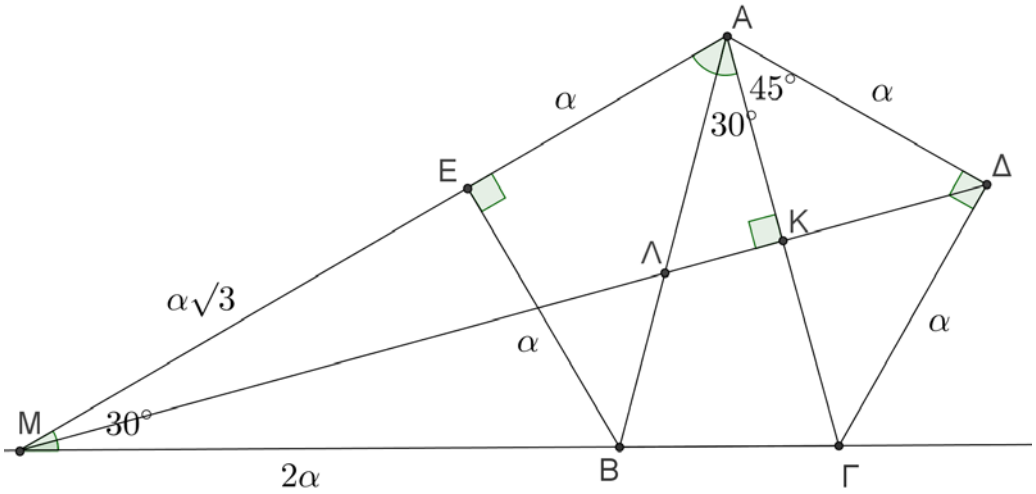
οπότε θα είναι: $\text{ΑΚ} = \frac{\text{ΑΓ}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{2}}{2}$.

Επιπλέον, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΛ με $\text{ΚΑ}\hat{\Lambda} = 30^\circ$, αν $\text{ΚΛ} = x$, έχουμε

$$x = \text{ΚΛ} = \text{ΑΛ} \cdot \eta\mu 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \text{ΑΛ} \Rightarrow \text{ΑΛ} = 2x,$$

οπότε από το Πυθαγόρειο θεώρημα λαμβάνουμε:

$$\text{ΑΚ}^2 + x^2 = (2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \text{ΑΚ}^2 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{\alpha^2}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\alpha}{\sqrt{6}} = \frac{\alpha\sqrt{6}}{6}.$$



Σχήμα 4

(β) Επειδή κάθε σημείο της μεσοκάθετης ΜΔ του ευθυγράμμου τμήματος ΑΓ ισαπέχει από τα άκρα του Α και Γ το τρίγωνο ΜΑΓ είναι ισοσκελές με

$$\text{ΜΑ} = \text{ΜΓ} \text{ και } \text{ΜΑ}\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma} = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ,$$

οπότε $\text{ΜΑ}\hat{\Gamma} = 75^\circ \Leftrightarrow \text{ΜΑ}\hat{\text{Β}} + 30^\circ = 75^\circ \Leftrightarrow \text{ΜΑ}\hat{\text{Β}} = 45^\circ$.

Από το σημείο Β φέρουμε ευθεία κάθετη προς την ευθεία ΜΑ που την τέμνει, έστω στο Ε, οπότε σχηματίζονται δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΒ και ΒΕΜ.

Το τρίγωνο ΑΕΒ είναι ορθογώνιο ισοσκελές και ίσο με το τρίγωνο ΑΓΔ, γιατί έχουν ίσες υποτείνουσες $\text{ΑΒ} = \text{ΑΓ}$. Άρα είναι $\text{ΑΕ} = \alpha$ και $\text{ΒΕ} = \alpha$.

Το τρίγωνο ΒΜΕ έχει

$$\text{ΜΒ}\hat{\text{Ε}} = \text{ΒΜ}\hat{\text{Α}} = 180^\circ - 2 \cdot \hat{\Gamma} = 180^\circ - 2 \cdot 75^\circ = 30^\circ,$$

οπότε θα είναι

$$\text{ΒΕ} = \text{ΒΜ} \cdot \eta\mu 30^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cdot \text{ΒΜ} \Rightarrow \text{ΒΜ} = 2\alpha \text{ και}$$

$$\text{ΜΕ} = \text{ΒΜ} \cdot \sigma\upsilon\nu 30^\circ \Rightarrow \text{ΜΕ} = 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}.$$

Άρα έχουμε:

$$\text{ΑΜ} = \text{ΑΕ} + \text{ΜΕ} = \alpha\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

Τέλος από την ισότητα $\text{ΜΓ} = \text{ΜΑ}$ λαμβάνουμε:

$$2\alpha + \text{ΒΓ} = \alpha\sqrt{3} + \alpha \Leftrightarrow \text{ΒΓ} = \alpha\left(\sqrt{3} - 1\right).$$

Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τους αριθμούς $x=\dfrac{2}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)}$ και $y=\sqrt[4]{2}$.

Να συγκρίνετε τους αριθμούς $x+1$ και y.

Λύση

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρανομαστή του κλάσματος επί $\sqrt[8]{3}-1$ και εκτελώντας διαδοχικά τις εμφανιζόμενες διαφορές τετραγώνων, λαμβάνουμε

$$x=\frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(1+\sqrt[8]{3}\right)\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt[4]{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}-1\right)}=\frac{2\left(\sqrt[8]{3}-1\right)}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-1\right)}=\sqrt[8]{3}-1.$$

Επομένως έχουμε

$$x+1=\sqrt[8]{3}<\sqrt[8]{4}=\sqrt[4]{2}=y.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους συναληθεύουν οι ανισώσεις:

$$1-\frac{|x-1|}{3}\geq 0 \qquad \text{και} \qquad \left(|x|-2\right)\cdot\left(|x|-5\right)\leq 0.$$

Λύση

Έχουμε

$$1-\frac{|x-1|}{3}\geq 0 \Leftrightarrow |x-1|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq x-1\leq 3 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 4. \qquad (1)$$

Για την ανίσωση $\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right)\leq 0$ έχουμε:

$$\left(|x|-2\right)\left(|x|-5\right)\leq 0 \Leftrightarrow \left(|x|-2\geq 0 \text{ και } |x|-5\leq 0\right) \text{ ή } \left(|x|-2\leq 0 \text{ και } |x|-5\geq 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\leq |x\leq 5| \text{ ή } \left(|x|\leq 2 \text{ και } |x|\geq 5\right), \text{ αδύνατη} \Leftrightarrow 2\leq |x|\leq 5.$$

Όμως $|x|\geq 2 \Leftrightarrow x\leq -2$ ή $x\geq 2$ και $|x|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq x\leq 5$, οπότε η ανίσωση αληθεύει όταν

$$-5\leq x\leq -2 \text{ ή } 2\leq x\leq 5 \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι το δεδομένο σύστημα ανισώσεων αληθεύει για

$$x=-2 \text{ ή } 2\leq x\leq 4.$$

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με (ΑΒ = ΑΓ > ΒΓ). Ο κύκλος $c_1(\Gamma,\text{ΒΓ})$ (με κέντρο Γ και ακτίνα ΒΓ) τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Δ. Ο κύκλος $c_2(\text{Α},\text{ΑΔ})$ (με κέντρο Α και ακτίνα ΑΔ) τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Ε και τον κύκλο $c_1(\Gamma,\text{ΒΓ})$ στο σημείο Ζ. Ο περιγεγραμμένος κύκλος c_3 του τριγώνου ΑΔΖ τέμνει την ευθεία ΒΕ στο σημείο Μ.

(α) Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β, Ε, Ζ είναι πάνω στην ίδια ευθεία.

(β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΜ είναι μεσοκάθετη της πλευράς ΒΓ.

Λύση

(α) Ισχύουν οι παρακάτω ισότητες τμημάτων: