Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4},\quad x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0.$$

Λύση

Έχουμε

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{|x|+x}{2}\le\frac{|x|+3+x^2}{4}\Leftrightarrow (x-1)^2+2\left(|x|+x\right)\le|x|+3+x^2$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+2|x|+2x\le|x|+3+x^2\Leftrightarrow|x|\le2\Leftrightarrow-2\le x\le2.$$

Επομένως η ανίσωση του συστήματος αληθεύει για $x\in[-2,2]$.

Επιπλέον, έχουμε

$$x\left(x^2+4\right)\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2+4=0 \text{ ή } x^2-5x+4=0.$$

Η εξίσωση $x^2+4=0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, αφού $x^2+4>0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ενώ η εξίσωση $x^2-5x+4=0$ έχει διακρίνουσα $\Delta=9>0$ και ρίζες $x=1$ ή $x=4$.

Επομένως η εξίσωση του συστήματος έχει τις ρίζες $x=0$ ή $x=1$ ή $x=4$

Επειδή $4\notin[-2,2]$, το σύστημα αληθεύει για $x=0$ ή $x=1$.

Πρόβλημα 2

Να απλοποιήσετε τις κλασματικές παραστάσεις

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}\quad\text{και}\quad \mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5},$$

αν $y\ne\pm x$ και $2x+4y+5\ne0$, και να λύσετε την εξίσωση

$$\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y).$$

Λύση

Λόγω των υποθέσεων $y\ne\pm x$ και $2x+4y+5\ne0$, δεν μηδενίζονται οι παρανομαστές των δύο παραστάσεων, οπότε αυτές ορίζονται. Με πράξεις στον παρανομαστή και στον αριθμητή της παράστασης $\mathrm{A}(x,y)$ λαμβάνουμε:

$$\mathrm{A}(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^3-y^3\right)\left(x^3+y^3\right)}{\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(x^6-y^6\right)}{x^6-y^6}=x^2+y^2.$$

Η απλοποίηση μπορεί επίσης να γίνει με χρήση της παραγοντοποίησης

$$x^6-y^6=\left(x^2\right)^3-\left(y^2\right)^3=\left(x^2-y^2\right)\left(x^4+x^2y^2+y^4\right)$$

ή των παραγοντοποιήσεων

$$x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right),\qquad x^3+y^3=(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)$$
$$x^4+y^4+x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=\left(x^2+y^2+xy\right)\left(x^2+y^2-xy\right).$$

Έχουμε επίσης

$$\mathrm{B}(x,y)=\frac{4x^2+16y^2+16xy-25}{2x+4y+5}=\frac{(2x+4y)^2-5^2}{2x+4y+5}$$
$$=\frac{(2x+4y+5)(2x+4y-5)}{2x+4y+5}=2x+4y-5.$$

Επομένως η εξίσωση $\mathrm{A}(x,y)=\mathrm{B}(x,y)$ γίνεται:

$$x^2+y^2=2x+4y-5 \Leftrightarrow x^2-2x+y^2-4y+5=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=0$$

$\Leftrightarrow x-1=0$ και $y-2=0$ (διαφορετικά θα είχαμε $(x-1)^2+(y-2)^2>0$)

$\Leftrightarrow x=1,\ y=2.$

Πρόβλημα 3

Δίνεται οξυγώνιο σκαληνό τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Δ,Ε των πλευρών του ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα, ώστε $\mathrm{A\Delta}=\mathrm{AE}$. Οι κύκλοι $c_1(\mathrm{B},\mathrm{BE})$ και $c_2(\Gamma,\Gamma\Delta)$ τέμνουν την ευθεία ΒΓ στα σημεία $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2$ και Γ_1,Γ_2, αντίστοιχα. Το σημείο B_1 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Β και το σημείο Γ_2 βρίσκεται εκτός του τμήματος ΒΓ προς το μέρος του Γ.

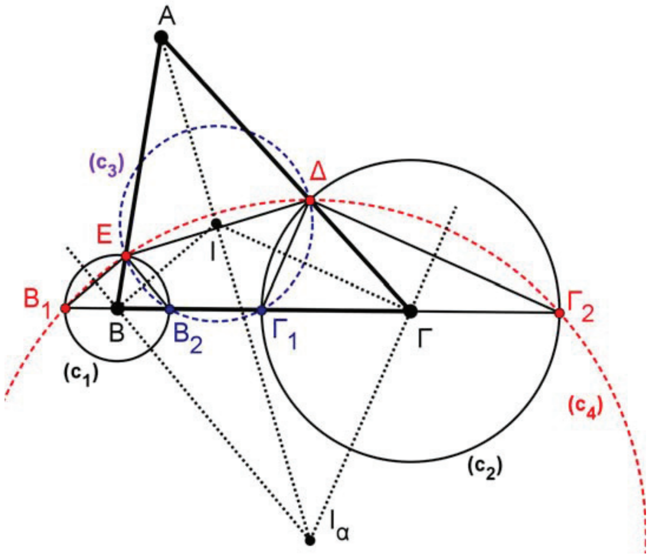
Να αποδείξετε ότι:

(α) Τα σημεία $\mathrm{E},\mathrm{B}_2,\Gamma_1,\Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_3.

(β) Τα σημεία $\mathrm{E},\mathrm{B}_1,\Gamma_2,\Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο, έστω c_4.

(γ) Το σημείο Α και τα κέντρα των κύκλων c_3 και c_4, βρίσκονται επάνω στην ίδια ευθεία.

Λύση



Σχήμα 3

(α) Το τρίγωνο BEB_2 είναι ισοσκελές (οι πλευρές ΒΕ και BB_2 είναι ακτίνες του κύκλου c_1), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς EB_2 είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο Ι του τριγώνου ΑΒΓ. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{IE}=\mathrm{IB}_2 \qquad (1).$$

Το τρίγωνο $\Gamma\Delta\Gamma_1$ είναι ισοσκελές (οι πλευρές $\Gamma\Delta$ και $\Gamma\Gamma_1$ είναι ακτίνες του κύκλου c_2), οπότε η μεσοκάθετη της πλευράς $\Delta\Gamma_1$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{I}\Gamma_1 \qquad (2).$$

Το τρίγωνο $\mathrm{AE}\Delta$ είναι ισοσκελές (διότι $\mathrm{A}\Delta = \mathrm{AE}$), άρα η μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{E}\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και κατά συνέπεια θα διέρχεται από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$. Επιπλέον ισχύει:

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} \qquad (3).$$

Επομένως, οι μεσοκάθετες των τμημάτων $\mathrm{B}_2\mathrm{E}$, $\mathrm{E}\Delta$, $\Delta\Gamma_1$ περνάνε από το έκκεντρο I του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$, οπότε (σε συνδυασμό με τις ισότητες (1), (2), (3)) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{I}\Delta = \mathrm{IE} = \mathrm{IB}_2 = \mathrm{I}\Gamma_1 := r,$$

δηλαδή τα σημεία E, B_2, Γ_1, Δ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_3 με κέντρο το I και ακτίνα r.

(β) Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύουμε ότι τα σημεία $\mathrm{E}, \mathrm{B}_1, \Gamma_2, \Delta$ βρίσκονται επάνω σε κύκλο c_4 με κέντρο το παράκεντρο I_α του τριγώνου $\mathrm{AB\Gamma}$ και ακτίνα $r_\alpha := \mathrm{I}_\alpha\Delta = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{E} = \mathrm{I}_\alpha\Gamma_2 = \mathrm{I}_\alpha\mathrm{B}_1$.

(γ) Τα κέντρα των παραπάνω κύκλων (c_3 και c_4) βρίσκονται επάνω στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{\mathrm{A}}$, οπότε θα είναι συνευθειακά με τη κορυφή A.

Πρόβλημα 4

Δίνεται η εξίσωση

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + \sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0,$$

όπου $x \in \mathbb{R}$ άγνωστος και $a \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου a.

Λύση

Για να ορίζεται η $\sqrt{x-2}$ πρέπει να είναι $x \geq 2$.

Η εξίσωση γράφεται στην ισοδύναμη μορφή

$$a^2x^2 + 2a\left(\sqrt{2}-1\right)x + 3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (1)$$

Για $a = 0$ έχουμε την εξίσωση

$$3 - 2\sqrt{2} = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2,$$ (αδύνατη, αφού $3 - 2\sqrt{2} > 0$).

Για $a \neq 0$, το πρώτο μέλος της (1) είναι τριώνυμο με διακρίνουσα $\Delta = 0$, οπότε η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα ως

$$\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 = -\sqrt{x-2},\ x \geq 2. \qquad (2)$$

Επειδή είναι $\left(ax + \sqrt{2} - 1\right)^2 \geq 0$ και $-\sqrt{x-2} \leq 0,\ x \geq 2,$ έπεται ότι η εξίσωση (2) έχει λύση, αν, και μόνον αν, $ax + \sqrt{2} - 1 = 0$ και $x - 2 = 0,\ x \geq 2 \Leftrightarrow x = 2,$ εφόσον $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Επομένως, η δεδομένη εξίσωση έχει μόνο για $a = \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ τη λύση $x = 2.$