

δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αθλήματα είναι σε ποσοστό $100 - 90 = 10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι 24, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $24 \cdot \frac{100}{10} = 240$ μαθητές. Επομένως, οι μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $240 \cdot \frac{60}{100} = 144$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $240 \cdot \frac{45}{100} = 108$.

Γ' τάξη Γυμνασίου

Πρόβλημα 1

(α) Να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^3 + \frac{81x^2 + 27y}{y}, \text{ όταν } x = 3^{-2}, y = 3^{-3}.$$

(β) Να βρείτε το πλήθος των ψηφίων του αριθμού $B = 16^{23} \cdot 5^{89}$, όταν αυτός γραφεί στη δεκαδική αναπαράστασή του.

Λύση

(α) Για $x = 3^{-2}$, $y = 3^{-3}$ έχουμε $\frac{x^3}{y^2} = \frac{(3^{-2})^3}{(3^{-3})^2} = \frac{3^{-6}}{3^{-6}} = 1$, $\frac{x}{y} = \frac{3^{-2}}{3^{-3}} = \frac{3^3}{3^2} = 3$ και

$$\frac{81x^2 + 27y}{y} = \frac{81 \cdot (3^{-2})^2 + 27 \cdot 3^{-3}}{3^{-3}} = \frac{81 \cdot 3^{-4} + 27 \cdot 3^{-3}}{3^{-3}} = \frac{81 \cdot \frac{1}{81} + 27 \cdot \frac{1}{27}}{3^{-3}} = 2 \cdot 3^3.$$

Άρα έχουμε

$$A = \left(\frac{x^3}{y^2} + \frac{1}{3} \right) \cdot \left(\frac{x}{y} \right)^3 + \frac{81x^2 + 27y}{y} = \left(1 + \frac{1}{3} \right) \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^3 = \frac{4}{3} \cdot 27 + 2 \cdot 27 = 36 + 54 = 90.$$

(β) Ο αριθμός B γράφεται στη μορφή

$$B = 16^{23} \cdot 5^{89} = (2^4)^{23} \cdot 5^{89} = 2^{92} \cdot 5^{89} = 2^3 \cdot (2^{89} \cdot 5^{89}) = 2^3 \cdot (2 \cdot 5)^{89} = 2^3 \cdot 10^{89} = 8 \cdot 10^{89}.$$

Επομένως, ο αριθμός B έχει πρώτο ψηφίο το 8 και ακολουθούν 89 μηδενικά, δηλαδή έχει συνολικά στη δεκαδική του αναπαράσταση 90 ψηφία.

Πρόβλημα 2

Από τους μαθητές ενός Γυμνασίου το 65% παίζει ποδόσφαιρο, το 45% παίζει μπάσκετ, ενώ το 20% παίζει και ποδόσφαιρο και μπάσκετ. Επιπλέον υπάρχουν 12 μαθητές που δεν παίζουν κανένα άθλημα, ενώ υπάρχουν άλλοι 24 μαθητές που παίζουν μόνο βόλεϊ. Να βρείτε πόσους μαθητές έχει το Γυμνάσιο, πόσοι από αυτούς παίζουν ποδόσφαιρο και πόσοι από αυτούς παίζουν μπάσκετ.

Λύση

Ο αριθμός των μαθητών που παίζουν ένα τουλάχιστον από τα δύο αθλήματα (ποδόσφαιρο ή μπάσκετ) είναι σε ποσοστό $(65 + 45) - 20 = 90\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Επομένως ο αριθμός των μαθητών που δεν ασχολούνται με κανένα από τα δύο αυτά αθλήματα είναι σε ποσοστό $100 - 90 = 10\%$ των μαθητών του Γυμνασίου. Σύμφωνα με την υπόθεση, αυτοί οι μαθητές είναι $24 + 12 = 36$, οπότε το Γυμνάσιο έχει συνολικά $36 \cdot \frac{100}{10} = 360$ μαθητές. Επομένως, οι

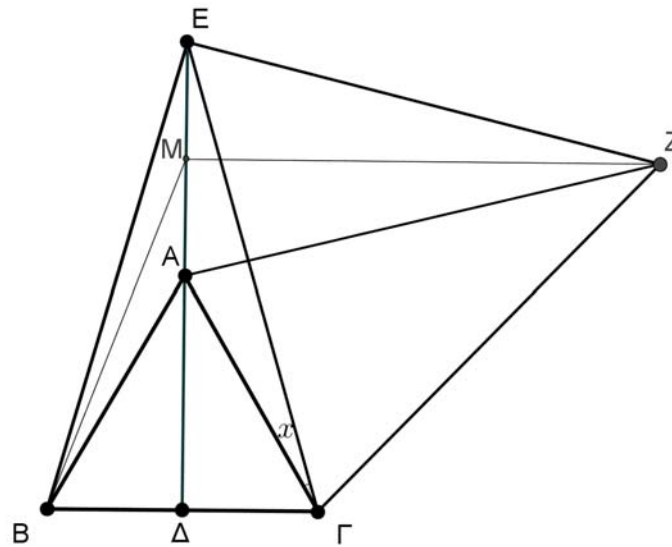
μαθητές που παίζουν ποδόσφαιρο είναι $360 \cdot \frac{65}{100} = 234$, ενώ οι μαθητές που παίζουν μπάσκετ είναι $360 \cdot \frac{45}{100} = 162$.

Πρόβλημα 3

Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς α . Προεκτείνουμε το ύψος του $A\Delta$ προς το μέρος του A κατά τμήμα $AE = A\Delta$. Φέρουμε τις $EB, E\Gamma$ και εξωτερικά του τριγώνου $EB\Gamma$ κατασκευάζουμε ισόπλευρο τρίγωνο $EZ\Gamma$. Έστω M το μέσον του τμήματος AE .

- (i) Να αποδείξετε ότι: $AZ = E\Gamma$.
- (ii) Να βρείτε το εμβαδό του τετραπλεύρου $AGZE$ ως συνάρτηση του α .
- (iii) Να βρείτε το εμβαδόν του τετραπλεύρου $B\Gamma ZM$ ως συνάρτηση του α .

Λύση



Σχήμα 2

(i) Τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $ZA\Gamma$ έχουν:

1. $B\Gamma = A\Gamma$ (διότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο).
2. $E\Gamma = Z\Gamma$ (διότι το τρίγωνο AEG είναι ισόπλευρο).
3. $\hat{E}\Gamma B = \hat{Z}\Gamma A = 60^\circ + \hat{x}$, όπου $\hat{x} = \hat{A}\Gamma E$.

Άρα τα τρίγωνα $EB\Gamma$ και $ZA\Gamma$ είναι ίσα (έχουν δύο πλευρές και τις περιεχόμενες γωνίες ίσες), οπότε θα έχουν και $AZ = E\Gamma$.

(ii) Σημειώνουμε πρώτα ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο πλευράς α , οπότε το ύψος του $A\Delta$ έχει μήκος $\frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Άρα είναι $AE = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$ και $E\Delta = \alpha\sqrt{3}$

Έχουμε ότι: $(AGZE) = (A\Gamma Z) + (ZAE) = (EB\Gamma) + (ZAE)$, αφού λόγω της ισότητας των τριγώνων $EB\Gamma$ και $A\Gamma Z$ έπεται ότι έχουν και ίσα εμβαδά. Για το τρίγωνο $EB\Gamma$ θεωρούμε ως βάση το τμήμα $B\Gamma = \alpha$ με αντίστοιχο ύψος $E\Delta = 2 \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \alpha\sqrt{3}$, οπότε έχει εμβαδό

$$(EB\Gamma) = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \alpha\sqrt{3} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2}.$$

Στο τρίγωνο ZAE θεωρούμε ως βάση το τμήμα $AE = \Delta\Lambda = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2}$. Επειδή το τρίγωνο αυτό είναι ισοσκελές ($AZ = EG = ZE$) και το M είναι μέσο του τμήματος AE έπεται ότι το ZM είναι ύψος του τριγώνου ZAE που αντιστοιχεί στη βάση AE. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ZAM λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} ZM &= \sqrt{ZA^2 - AM^2} = \sqrt{EG^2 - AM^2} = \sqrt{E\Delta^2 + \Delta\Gamma^2 - AM^2} \\ &= \sqrt{\left(\alpha\sqrt{3}\right)^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \left(\frac{\alpha\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{3\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{4} - \frac{3\alpha^2}{16}} = \frac{7\alpha}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Άρα έχουμε } (ZAE) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{7\alpha}{4} = \frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16}, \text{ οπότε}$$

$$(A\Gamma ZE) = (EB\Gamma) + (ZAE) = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{2} + \frac{7\alpha^2\sqrt{3}}{16} = \frac{15\alpha^2\sqrt{3}}{16}.$$

(iii) Το τετράπλευρο BΓZM είναι τραπέζιο ($ZM \parallel B\Gamma$, αφού και οι δύο είναι κάθετες προς την ευθεία ΔΕ. Βάσεις του τραπέζιου αυτού είναι οι $B\Gamma = \alpha$, $ZM = \frac{7\alpha}{4}$ και ύψος το τμήμα

$$\Delta M = \Delta A + \Delta M = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} + \frac{\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{3\alpha\sqrt{3}}{4}, \text{ οπότε έχει εμβαδό}$$

$$(B\Gamma ZM) = \frac{1}{2}(B\Gamma + ZM) \cdot \Delta M = \frac{1}{2} \cdot \left(\alpha + \frac{7\alpha}{4}\right) \cdot \frac{3\alpha\sqrt{3}}{4} = \frac{33\alpha^2\sqrt{3}}{32}.$$

Πρόβλημα 4

Δίνονται τα πολυώνυμα

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b) \text{ και } Q(x) = a^2x^3 + 4x^2 + dx + e,$$

όπου οι συντελεστές a, b, c, d, e είναι θετικοί ακέραιοι. Αν ισχύει ότι $P(1) = 21$, να βρείτε τις τιμές των a, b, c, d, e για τις οποίες τα πολυώνυμα $P(x)$ και $Q(x)$ είναι ίσα.

Λύση

Από την ισότητα $P(1) = 21$ έχουμε ότι $P(1) = (a + b + c)(a + b) = 21$, από την οποία, λόγω της υπόθεσης ότι οι a, b, c είναι θετικοί ακέραιοι, οπότε $a + b + c > a + b$, έπεται ότι

$$\left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 7 \\ a + b = 3 \end{array} \right\} \quad (1) \quad \text{ή} \quad \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 21 \\ a + b = 1 \end{array} \right\}. \quad (2)$$

Επειδή οι a, b είναι θετικοί ακέραιοι η εξίσωση $a + b = 1$ του συστήματος (2) είναι αδύνατη, οπότε και το σύστημα (2) είναι αδύνατο.

Από το σύστημα (1) λαμβάνουμε $a + b = 3$ και $c = 4$.

Το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται στη μορφή

$$P(x) = (ax^2 + bx + c)(ax + b) = a^2x^3 + 2abx^2 + (b^2 + ac)x + bc,$$

οπότε έχουμε

$$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow \{a^2 = a^2, 2ab = 4, b^2 + ac = d, bc = e\}.$$

Επειδή $c = 4$ και $a + b = 3$, τελικά έχουμε τις εξισώσεις:

$$a + b = 3, ab = 2, c = 4, b^2 + 4a = d, 4b = e, a, b, c, d, e \text{ θετικοί ακέραιοι,}$$

$$\Leftrightarrow a = 1, b = 2, c = 4, d = 8, e = 8 \text{ ή } a = 2, b = 1, c = 4, d = 9, e = 4.$$