Α΄ τάξη Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές των ρητών αριθμών α,β για τις οποίες ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Κατ' αρχή παρατηρούμε ότι για $\beta=0$, ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}=\alpha$ είναι ρητός, για κάθε ρητό αριθμό α.

Έστω ότι, για $\beta\neq 0$, ο αριθμός $\rho=\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$\rho-\alpha=\left(\alpha+\beta\sqrt{10}\right)-\alpha=\beta\sqrt{10}$$

θα είναι ρητός, αλλά και ο αριθμός $\dfrac{\rho-\alpha}{\beta}=\sqrt{10}$ θα είναι ρητός, που είναι άτοπο.

Άρα ο αριθμός $\alpha+\beta\sqrt{10}$ είναι ρητός, για $\beta=0$ και για κάθε ρητό αριθμό α.

(ii) Έστω ότι ο αριθμός $x=\sqrt{5}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ είναι ρητός. Τότε και ο αριθμός

$$x^2=\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=5+\frac{2}{4}+\sqrt{10}=\frac{11}{2}+\sqrt{10},$$

θα είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\left(|x|-2\right)^2=x^2+4\alpha,$$

για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

Λύση

Η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$|x|^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow x^2-4|x|+4=x^2+4\alpha \Leftrightarrow |x|=1-\alpha .$$

Επειδή είναι $|x|\geq 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x, διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $\alpha<1$, οπότε είναι $1-\alpha>0$. Τότε η εξίσωση έχει δύο λύσεις:
  $$x=1-\alpha \text{ ή } x=\alpha-1.$$
- $\alpha=1$, οπότε η εξίσωση έχει μόνο τη λύση $x=0$.
- $\alpha>1$, οπότε η εξίσωση είναι αδύνατη.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από την κορυφή του Α και είναι παράλληλη προς τη πλευρά ΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\mathrm{B}}$ τέμνει την ευθεία ε στο σημείο Δ και έστω Ε το συμμετρικό του Δ ως προς τη κορυφή Α. Από το Α τέλος θεωρούμε παράλληλη προς την ΕΒ η οποία τέμνει τη ΒΔ στο σημείο Μ και τη ΒΓ στο σημείο Κ. Να αποδείξετε ότι : ΑΒ = ΒΚ = ΚΔ = ΔΑ.

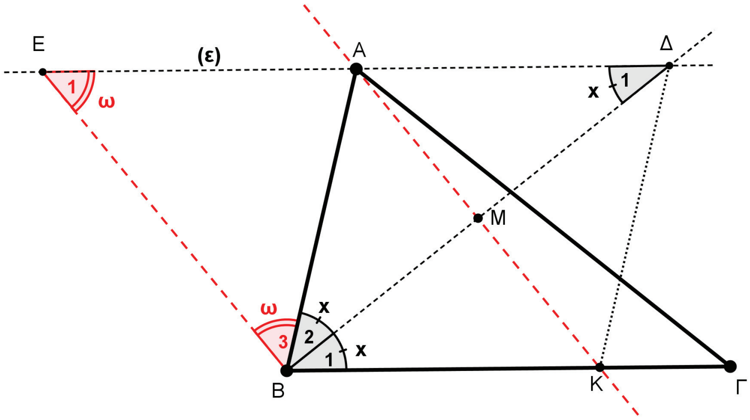
Λύση

Επειδή είναι $\mathrm{A\Delta\,P\,B\Gamma}$ θα ισχύει: $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_1 = \hat{x} = \dfrac{\hat{B}}{2}$.

Επίσης η $\mathrm{B\Delta}$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$, οπότε θα ισχύει: $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \dfrac{\hat{B}}{2}$.

Άρα $\hat{\Delta}_1 = \hat{B}_2 = \hat{x} = \dfrac{\hat{B}}{2}$ και κατά συνέπεια το τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$ είναι ισοσκελές, δηλαδή:

$$\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta}. \qquad (1)$$



Σχήμα 3

Επειδή E είναι το συμμετρικό του Δ ως προς το A, θα ισχύει:

$$\mathrm{A\Delta} = \mathrm{AE}. \qquad (2)$$

Από τις σχέσεις (1),(2) έχουμε $\mathrm{AE} = \mathrm{AB}$ και κατά συνέπεια $\hat{E}_1 = \hat{B}_3 = \hat{\omega}$.

Από το τρίγωνο τώρα $\mathrm{BE\Delta}$ έχουμε:

$$\hat{\Delta}_1 + \hat{B}_2 + \hat{B}_3 + \hat{E}_1 = 180^o \Rightarrow 2\hat{x} + 2\hat{\omega} = 180^o \Rightarrow \hat{x} + \hat{\omega} = 90^o,$$

δηλαδή το τρίγωνο $\mathrm{BE\Delta}$ είναι ορθογώνιο ($\mathrm{BE} \perp \mathrm{B\Delta}$) και εφόσον $\mathrm{AM\,P\,BE}$ καταλήγουμε:

$$\mathrm{AM} \perp \mathrm{B\Delta}.$$

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{BA\Delta}$ η AM είναι ύψος, άρα και μεσοκάθετη της πλευράς $\mathrm{B\Delta}$.

Επειδή τώρα το σημείο K ανήκει στη μεσοκάθετη του $\mathrm{B\Delta}$, το τρίγωνο $\mathrm{KB\Delta}$ είναι ισοσκελές και ίσο με το ισοσκελές τρίγωνο $\mathrm{AB\Delta}$ (διότι $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2}$ και $\mathrm{B\Delta}$ κοινή πλευρά). Άρα θα έχουν και $\mathrm{AB} = \mathrm{A\Delta} = \mathrm{BK} = \mathrm{K\Delta}$, οπότε το τετράπλευρο $\mathrm{ABK\Delta}$ είναι ρόμβος.

Πρόβλημα 4

Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ που ικανοποιούν τις ισότητες

$$\alpha + \beta + \gamma = 2010 \quad \text{και} \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 67^2.$$

Λύση

Από τις δεδομένες ισότητες λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta+\gamma)^2 = 2010^2 &\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 + 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 2010^2 \\
&\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2010^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) \\
&\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2010^2 - 2(2^2\cdot 3\cdot 5^2\cdot 67^2) \\
&\Rightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2010^2 - \frac{2}{3}\cdot 2010^2 = \frac{2010^2}{3}.
\end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\left(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\right)=\frac{2010^2}{3}-\frac{1}{3}\cdot 2010^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot\left(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha-\beta=\beta-\gamma-\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma,$$

γιατί, αν ήταν $\alpha-\beta\neq 0$ ή $\beta-\gamma\neq 0$ ή $\gamma-\alpha\neq 0,$ τότε θα είχαμε

$$\left(\alpha-\beta\right)^2+\left(\beta-\gamma\right)^2+\left(\gamma-\alpha\right)^2>0.$$

Επομένως, από την ισότητα $\alpha+\beta+\gamma=2010$ λαμβάνουμε $\alpha=\beta=\gamma=670$.