Α΄ Λυκείου

Πρόβλημα 1

(i) Να βρείτε τις τιμές του ρητού αριθμού α, για τις οποίες ο αριθμός $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ είναι ρητός.

(ii) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2$ είναι άρρητος.

Λύση

(i) Για $\alpha = 0$ είναι $\mathrm{A} = 0$, ρητός. Έστω $\alpha \neq 0$. Αν ήταν ο $\mathrm{A} = \alpha\sqrt{3}$ ρητός, τότε ο αριθμός $\frac{\mathrm{A}}{\alpha} = \sqrt{3}$**,** θα ήταν επίσης ρητός, ως πηλίκο δύο ρητών αριθμών, που είναι άτοπο.

Επομένως, ο αριθμός Α είναι ρητός μόνο για $\alpha = 0$.

(ii) Έχουμε $\mathrm{B} = \left(1+\sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$. Αν ο αριθμός Β ήταν ρητός, τότε ο αριθμός $\mathrm{B} - 4 = 2\sqrt{3}$ θα ήταν επίσης ρητός, ως διαφορά δύο ρητών, το οποίο είναι άτοπο, σύμφωνα με το (i).

Πρόβλημα 2

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$x + 1 - 2|x| = \alpha x,$$

έχει, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, μία τουλάχιστον πραγματική λύση.

Για ποιες τιμές του α η εξίσωση έχει δύο διαφορετικές μεταξύ τους πραγματικές λύσεις;

Λύση

Επειδή στην εξίσωση εμφανίζεται η απόλυτη τιμή του αγνώστου x διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Έστω $x \geq 0$**.**

Τότε ισχύει $|x| = x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x + 1 - 2x = \alpha x, x \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha + 1)x = 1, x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\alpha + 1}, & \text{αν } \alpha > -1 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha \leq -1. \end{cases}$$

(ii) Έστω $x < 0$**.**

Τότε ισχύει $|x| = -x$ και η δεδομένη εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα:

$$x + 1 + 2x = \alpha x, x < 0 \Leftrightarrow (\alpha - 3)x = 1, x < 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{\alpha - 3}, & \text{αν } \alpha < 3 \\ \text{αδύνατο, αν } \alpha \geq 3. \end{cases}$$

Επομένως, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση έχει μία τουλάχιστον πραγματική λύση. Η εξίσωση έχει 2 πραγματικές λύσεις διαφορετικές μεταξύ τους, αν ισχύει: $-1 < \alpha < 3$.

Πράγματι, για $-1 < \alpha < 3$ η εξίσωση έχει τις λύσεις $x_1 = \frac{1}{\alpha - 3} < 0$ και $x_2 = \frac{1}{\alpha + 1} > 0$ που είναι διαφορετικές μεταξύ τους.

Πρόβλημα 3

Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο $C(O, R)$ και έστω A_1, B_1, C_1 τα αντιδιαμετρικά σημεία των κορυφών του A, B, C. Στις ευθείες που ορίζουν οι πλευρές BC, AC, AB θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, C_2 αντίστοιχα και έστω (ε_1) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία A_1, A_2, (ε_2) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία B_1, B_2 και (ε_3) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία C_1, C_2.

Έστω ακόμη (δ_1) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο A προς την (ε_1), (δ_2) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο B προς την (ε_2) και (δ_3) η παράλληλη ευθεία που φέρουμε από το σημείο C προς την (ε_3). Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ και (ε_3) συντρέχουν (περνάνε από το ίδιο σημείο), αν, και μόνο αν, οι ευθείες $(\delta_1), (\delta_2)$ και (δ_3) συντρέχουν

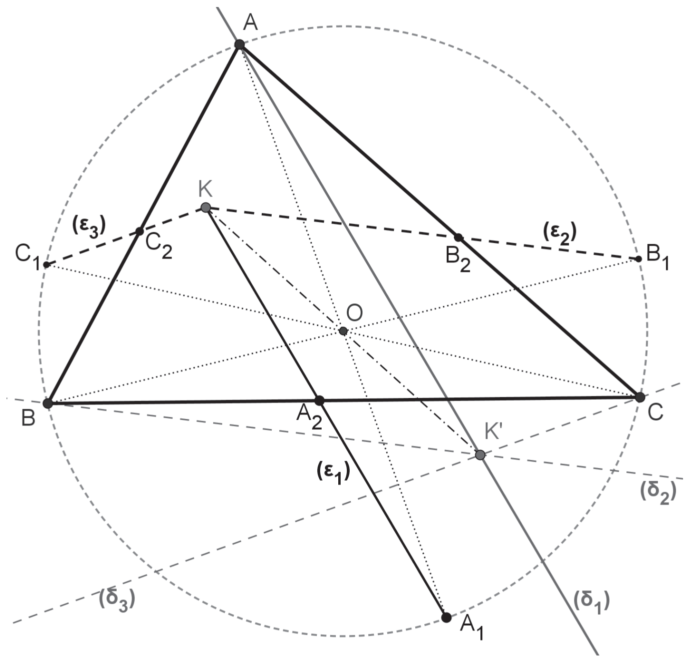
Λύση

Οι ευθείες (ε_1) και (δ_1) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της AA_1.

Οι ευθείες (ε_2) και (δ_2) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της BB_1.

Οι ευθείες (ε_3) και (δ_3) είναι συμμετρικές ως προς το κέντρο O του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ABC, αφού το O είναι μέσο της CC_1.

Σύμφωνα με τη θεωρία, αν περιστρέψουμε μία ευθεία κατά 180^0 γύρω από το κέντρο συμμετρίας, τότε αυτή θα συμπέσει με τη συμμετρική της ευθεία , ως προς κέντρο το σημείο O. Επομένως, οι ευθείες (ε_1), (ε_2) και (ε_3) συντρέχουν, έστω στο σημείο K, αν, και μόνο αν, οι ευθείες (δ_1), (δ_2) και (δ_3) συντρέχουν στο σημείο K', που είναι το συμμετρικό του σημείου K ως προς το σημείο O.



Σχήμα 3

Παρατήρηση

Το σημείο K ταυτίζεται με το ορθόκεντρο του τριγώνου ABC, αν, και μόνο αν, τα σημεία A_2, B_2, C_2 είναι τα μέσα των πλευρών BC, AC, AB αντίστοιχα.

Στη περίπτωση αυτή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή πρόταση:

"*Τα συμμετρικά του ορθοκέντρου ως προς τα μέσα των πλευρών τριγώνου, βρίσκονται επάνω στο περιγεγραμμένο του κύκλο και είναι αντιδιαμετρικά των κορυφών του*"

Πρόβλημα 4

Οι πραγματικοί αριθμοί x, y και z ικανοποιούν τις ισότητες:

$$x^3 - y^3 = 26z^3$$
$$x^2 y - xy^2 = 6z^3.$$

(α) Να εκφράσετε τους x, y συναρτήσει του z.

(β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y + 3z = 8$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z.

Λύση

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη ισότητα επί 3 και την αφαιρούμε από την πρώτη, οπότε λαμβάνουμε

$$(x-y)^3 = 8z^3 \Leftrightarrow x - y = 2z. \quad (1)$$

Τότε η δεύτερη ισότητα γίνεται:

$$2zxy = 6z^3, \quad (2)$$

οπότε διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Έστω $z \neq 0$.

Τότε η (2) είναι ισοδύναμη με την σχέση

$$xy = 3z^2, \quad (3)$$

Από τις (1) και (3), προκύπτει η σχέση

$$x(x-2z) = 3z^2 \Leftrightarrow x^2 - 2zx - 3z^2 = 0 \Leftrightarrow x = 3z \text{ ή } x = -z,$$

οπότε θα είναι

$$x = 3z, y = z \text{ ή } x = -z, y = -3z.$$

(ii) Για $z = 0$ οι δύο πρώτες εξισώσεις γίνονται:

$$\left\{\begin{array}{c} (x-y)(x^2+xy+y^2) = 0 \\ xy(x-y) = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow x - y = 0 \text{ ή } x = y = 0,$$

οπότε προκύπτει ότι:

$$x = y, \text{ ανεξάρτητα από το } z.$$

(β) Για $x = 3z, y = z$ η εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ γίνεται $8z = 8 \Leftrightarrow z = 1$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (3,1,1)$, ενώ για $x = -z, y = -3z$, η εξίσωση γίνεται $-4z = 8 \Leftrightarrow z = -2$, οπότε έχουμε ότι $(x, y, z) = (2, 6, -2)$.

Για $z = 0$, είναι $x = y$, οπότε από την εξίσωση $x + 2y + 3z = 8$ προκύπτει ότι

$$(x, y, z) = \left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0\right).$$